ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Підлягає поверненню на кафедру

Дискретна математика

Методичні вказівки

для студентів спеціальностей

напряму "Прикладна математика"

Частина I

Чернівці
"*Рута*"
2006

ББК 22.176
Ф-537
УДК 510.22; 519.1; 510.6

Друкується за ухвалою редакційно-видавничої ради
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

Ф-537 Дискретна математика: Методичні вказівки для студентів спеціальностей напряму "Прикладна математика". Частина I / Укл.: Філіпчук М.П. – Чернівці: Рута, 2006. – 60 с.

Методичні вказівки охоплюють розділи "Елементи теорії множин", "Комбінаторика" та "Елементи математичної логіки" фундаментального курсу "Дискретна математика". Викладено основні теоретичні поняття та факти, наведено приклади розв'язування типових задач, запропоновано велику кількість задач для самостійної роботи.

ББК 22.176
УДК 510.22; 519.1; 510.6

ВСТУП

Дискретна математика – фундаментальна математична дисципліна, що широко застосовується в математичній кібернетиці, комп’ютерній математиці та програмуванні, при створенні автоматизованих систем керування та проектування, засобів передачі й обробки інформації, а також при розв'язуванні багатьох технічних та економічних задач.

Дані методичні вказівки орієнтовано на студентів спеціальностей напряму “Прикладна математика” (спеціальності “Прикладна математика”, “Соціальна інформатика” та “Інформатика”), які протягом двох семестрів навчального року вивчають фундаментальний курс “Дискретна математика”.

На жаль, великий об’єм курсу не дозволив в одній методичній розробці розглянути всі його розділи. Запропоновані методичні вказівки охоплюють традиційні теми, що вивчаються у першому семестрі – теорію множин, комбінаторний аналіз і математичну логіку. При розгляді кожної теми викладено відповідні теоретичні поняття та факти, наведено приклади розв’язування ретельно підібраних типових задач. Для кращого засвоєння матеріалу запропоновано велику кількість задач для самостійної роботи та, з метою самоконтролю, в кінці розробки наведено відповіді до переважної більшості з них.

У списку рекомендованої літератури подано джерела, де студент може знайти детальний виклад теоретичного матеріалу та додаткові задачі для самостійного розв’язування.

Дані методичні вказівки повністю узгоджені з тематикою та матеріалом відповідних лекційних і практичних занять.

Електронні копії багатьох класичних та сучасних книг з математики, зокрема, дискретної, можна продивитися у електронній математичній бібліотеці, яка розміщена у локальній комп’ютерній мережі факультету прикладної математики за адресою:

Мережа \ *Робоча група* **“АРМ” **
Комп’ютер **TEACHER_PMM **
MATH-LIBRARY \ **START.HTM**.

ТЕМА 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

1.1. Основні поняття теорії множин. Операції над множинами та їх властивості

Інтуїтивне поняття множини: ***множина*** *– сукупність деяких різних об'єктів, яким властиве дещо спільне і які можна розглядати як єдине ціле.*

Об'єкти, з яких складається множина, називаються ***елементами множини****.*

Множини, як правило, позначають великими латинськими літерами *A, B, X, Y, ...*, а їх елементи – малими латинськими літерами *a, b, x, y ...*.

Множина, що не містить жодного елемента, називається ***порожньою****, і позначається символом* $\varnothing$.

Задати множину – вказати правило, яке дозволяє з'ясувати, чи є певний об`єкт елементом даної множини.

Найпростіший спосіб задання множини – **безпосередній перелік** усіх її елементів всередині фігурних дужок через кому, наприклад,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},\ \ B = \{1,2,3,4,5\},\ \ N = \{1,2,3,\ldots n,\ldots\},\ \ \varnothing = \{\}.$$

При цьому порядок розташування елементів у множині **неістотний**.

Множину також можна задати, вказавши **характерну властивість**, якою володіють усі елементи множини. При цьому множину X з елементів x, що задовольняють деяку умову *p(x)*, позначають так: $X = \{x \mid p(x)\}$ або $X = \{x : p(x)\}$. Наприклад,

$$A = \{x \mid x - \textit{просте число}\} \qquad (A = \{2,3,5,7,11,13,17,\ldots\}),$$

$$B = \{x \mid x \in R,\ x^2 + 2x - 15 = 0\} \qquad (B = \{-5,3\}).$$

Якщо елемент a входить до складу множини A (елемент a **міститься** у множині A), то це символічно записують $a \in A$, інакше – $a \notin A$. Нехай, наприклад, $A = \{1,2,3\}$, тоді $3 \in A$, $7 \notin A$.

Множина A називається ***підмножиною*** *множини B (позначається* $A \subseteq B$*), якщо кожен елемент множини A* *належить також і множині В*. Нехай, наприклад, $A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, тоді $A \subseteq B$.

Для будь-якої множини *A:* $A \subseteq A$, $\varnothing \subseteq A$.

Множини A і B називаються ***рівними*** *(позначається* $A = B$*), якщо вони складаються із однакових елементів. Якщо множини A і B* ***не рівні****, то це позначають* $A \neq B$. Нехай, наприклад, $A = \{1,3,5\}$, $B = \{3,1,5\}$, тоді $A = B$.

Очевидно, що $A = B$ тоді і тільки тоді, коли $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$:

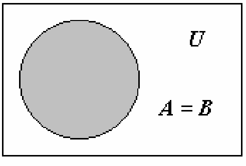
$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{cases} \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

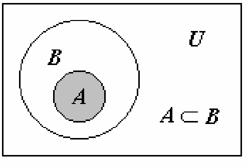
Множина A називається ***власною підмножиною*** *множини B (позначається* $A \subset B$*), якщо* $A \subseteq B$*, але* $A \neq B$. Нехай, наприклад, $A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$, тоді $A \subset B$, $B \not\subset A$.

Якщо всі множини, що розглядаються в процесі вивчення певного питання, є підмножинами деякої іншої множини *U*, то вона називається **універсальною множиною** у даному процесі. Наприклад, в елементарній алгебрі універсальною множиною є множина дійсних чисел *R*. Універсальну множину домовимось надалі завжди позначати символом *U*.

Для будь-якої множини *X:* $X \subseteq U$.

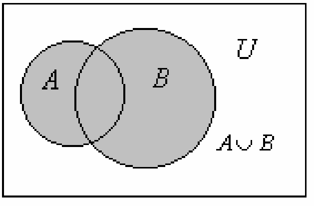
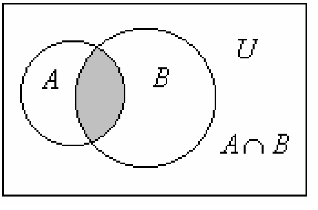
Для наочного зображення множин використовують спеціальні графічні **діаграми Ейлера-Венна**: універсальну множину *U* зображають у вигляді прямокутника, а інші множини – у вигляді кругів всередині цього прямокутника. Наприклад, діаграми Ейлера-Венна для ілюстрації понять $A = B$ і $A \subset B$ мають вигляд:





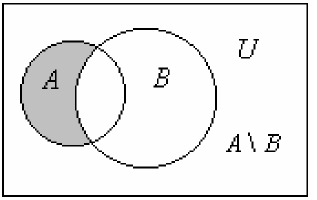
Розглянемо тепер операції, що можна виконувати над множинами – операцію об'єднання (позначається символом $\cup$), операцію перетину (позначається символом $\cap$), операцію різниці (позначається символом $\setminus$), операцію доповнення (позначається символом $\overline{\ \ }$) та операцію симетричної різниці (позначається символом Δ).

Визначення цих операцій подано у нижченаведеній таблиці, де A і B – довільні підмножини універсальної множини U. Результуючі множини на діаграмах Ейлера-Венна при цьому зафарбовано сірим кольором.

Означення операції	**Діаграма Ейлера-Венна, приклад**
Об'єднанням *множин A і B називається множина* $A \cup B$*, що складається з елементів, які належать хоча б одній із цих множин:* $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$. Аналогічним чином визначають об'єднання довільної скінченної кількості множин $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \equiv \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.	 Нехай $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, тоді $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Перетином *множин A і B називається множина* $A \cap B$*, що складається з елементів, які одночасно належать обом цим множинам:* $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$. Аналогічним чином визначають перетин довільної скінченної кількості множин $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \equiv \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.	 Нехай $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, тоді $A \cap B = \{3,4\}$.

Різницею *множин A і B називається множина* $A \setminus B$, *що складається з таких елементів множини A, котрі не належать множині B:*

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$



Нехай
$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$,
тоді $A \setminus B = \{1,2\}$,
$B \setminus A = \{5,6\}$.

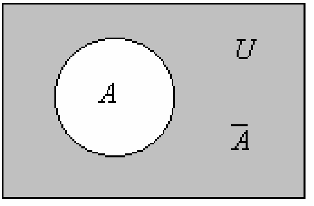
Доповненням *множини A називається множина* $\overline{A}$, *що складається з таких елементів універсальної множини U, котрі не належать множині* A:

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ і } x \notin A\}.$$

Очевидно,

$$\overline{A} = U \setminus A,$$

$$\overline{\overline{A}} = A.$$



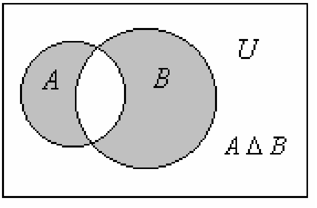
Нехай
$U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,3,5\}$,
тоді $\overline{A} = \{2,4\}$,
$\overline{\overline{A}} = \{1,3,5\} = A$.

Симетричною різницею *множин A і B називається множина* $A \Delta B$, *що визначається наступним чином:*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Очевидно, симетричну різницю можна визначати і так:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$



Нехай
$A = \{1,2,3,4\}$,
$B = \{3,4,5,6\}$,
тоді $A \Delta B = \{1,2,5,6\}$.

Розглянемо тепер властивості операцій над множинами. Нехай A, B і C – довільні підмножини універсальної множини U.

1. Властивості операції об'єднання

1.1. $A \cup B = B \cup A$ **(комутативність)**

1.2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ **(асоціативність)**

1.3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **(дистрибутивність відносно перетину)**

1.4. $A \cup A = A$ **(ідемпотентність)**

1.5. $A \cup \varnothing = A$

1.6. $A \cup U = U$

1.7. $A \cup \overline{A} = U$

1.8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ **(закон де Моргана)**

1.9. $A \cup (A \cap B) = A$ **(закон поглинання)**

2. Властивості операції перетину

2.1. $A \cap B = B \cap A$ **(комутативність)**

2.2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ **(асоціативність)**

2.3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **(дистрибутивність відносно об'єднання)**

2.4. $A \cap A = A$ **(ідемпотентність)**

2.5. $A \cap \varnothing = \varnothing$

2.6. $A \cap U = A$

2.7. $A \cap \overline{A} = \varnothing$

2.8. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ **(закон де Моргана)**

2.9. $A \cap (A \cup B) = A$ **(закон поглинання)**

3. Властивості операції доповнення

3.1. $\overline{\overline{A}} = A$ **(властивість інволюції)**

3.2. $\overline{\varnothing} = U$

3.3. $\overline{U} = \varnothing$

4. Властивості операції різниці

4.1. $A \setminus B \neq B \setminus A$, якщо $A \neq B$

4.2. Якщо $A \setminus B = \varnothing$, то $A \subseteq B$

4.3. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

4.4. $A \setminus A = \varnothing$

4.5. $A \setminus \varnothing = A$

4.6. $A \setminus U = \varnothing$

4.7. $A \setminus \overline{A} = A$

5. Властивості операції симетричної різниці

5.1. $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$ **(комутативність)**

5.2. $A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C) = (A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C$ **(асоціативність)**

5.3. $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$

(дистрибутивність перетину відносно симетричної різниці)

5.4. $A \,\Delta\, A = \varnothing$

5.5. $A \,\Delta\, \varnothing = A$

5.6. $A \,\Delta\, U = \overline{A}$

5.7. $A \,\Delta\, \overline{A} = U$

Наведені властивості операцій над множинами використовують для спрощення різних виразів і доведення різноманітних рівностей.

Із властивості 4.3 та означення симетричної різниці випливає, що операції різниці та симетричної різниці можуть бути виражені через більш прості операції об`єднання, перетину та доповнення:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

$$A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}),$$

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}).$$

1.2. Доведення рівностей з множинами

Для перевірки та доведення рівностей з множинами можна скористатися будь-яким із трьох методів: графічним методом, методом двостороннього включення чи методом еквівалентних перетворень.

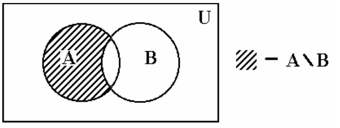
Найпростішим методом перевірки рівностей є **графічний метод.** Він полягає у порівнянні діаграм Ейлера-Венна для результуючих множин, що задаються відповідно правою і лівою частинами досліджуваної рівності. Якщо ці діаграми повністю співпадають (визначають одну і ту ж саму множину), досліджувана рівність є вірною, інакше – ні.

Задача 1.2.1. Графічним методом перевірити рівність

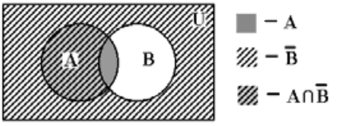
$$A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

тобто властивість 4.3 операції різниці.

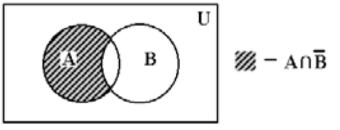
Розв'язання. Діаграма Ейлера-Венна для результуючої множини $A \setminus B$ із лівої частини досліджуваної рівності має вигляд:



Процес побудови діаграми Ейлера-Венна для множини $A \cap \overline{B}$ із правої частини досліджуваної рівності має вигляд:



тобто результуючій множині $A \cap \overline{B}$ відповідає діаграма



Очевидно, діаграми для результуючих множин повністю співпадають, отже, досліджувана рівність справді є вірною. ■

Універсальним методом доведення рівностей з множинами є **метод двостороннього включення**, який базується на співвідношенні (1.1.1), тобто для доведення рівності вигляду $A = B$ необхідно і досить показати, що $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

Задача 1.2.2. Методом двостороннього включення довести рівність

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Розв’язання.

1) Покажемо, що $A \setminus B \subseteq A \cap \overline{B}$.

Візьмемо довільний елемент x із множини $A \setminus B$. Необхідно показати, що тоді обов’язково $x \in A \cap \overline{B}$. Маємо:

$$\underline{x \in A \setminus B} \Rightarrow x \in A \; i \; x \notin B \Rightarrow x \in A \; i \; x \in \overline{B} \Rightarrow \underline{x \in A \cap \overline{B}}.$$

2) Покажемо, що $A \cap \overline{B} \subseteq A \setminus B$.

Візьмемо довільний елемент x із множини $A \cap \overline{B}$. Необхідно показати, що тоді обов’язково $x \in A \setminus B$. Маємо:

$$\underline{x \in A \cap \overline{B}} \Rightarrow x \in A \; i \; x \in \overline{B} \Rightarrow x \in A \; i \; x \notin B \Rightarrow \underline{x \in A \setminus B}. \; ■$$

Задача 1.2.3. Методом двостороннього включення довести закон де Моргана для операції об'єднання:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}\,.$$

Розв'язання.

1) $x \in \overline{A \cup B} \;\Rightarrow\; x \notin A \cup B \;\Rightarrow\; x \notin A \; і \; x \notin B \;\Rightarrow\; x \in \overline{A} \; і \; x \in \overline{B} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

2) $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \;\Rightarrow\; x \in \overline{A} \; і \; x \in \overline{B} \;\Rightarrow\; x \notin A \; і \; x \notin B \;\Rightarrow\; x \notin A \cup B \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x \in \overline{A \cup B}$. ■

Задача 1.2.4. Методом двостороннього включення довести дистрибутивність операції перетину відносно операції об'єднання:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,.$$

Розв'язання.

1) $x \in A \cap (B \cup C) \;\Rightarrow\; x \in A \;\; і \;\; x \in (B \cup C) \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x \in A \;\; і \;\; (x \in B \;\; або \;\; x \in C) \;\Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \;\; і \;\; x \in B) \;\; або \;\; (x \in A \;\; і \;\; x \in C) \;\Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A \cap B) \;\; або \;\; (x \in A \cap C) \;\Rightarrow\; x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2) $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \;\Rightarrow\; (x \in A \cap B) \;\; або \;\; (x \in A \cap C) \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; (x \in A \;\; і \;\; x \in B) \;\; або \;\; (x \in A \;\; і \;\; x \in C) \;\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \;\; і \;\; (x \in B \;\; або \;\; x \in C) \;\Rightarrow\; x \in A \;\; і \;\; x \in (B \cup C) \;\Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$. ■

Графічним методом та методом двостороннього включення можуть бути перевірені та строго доведені властивості 1.1 – 5.7 операцій над множинами.

Незважаючи на універсальність, недоліком останнього методу є те, що для складних рівностей він стає досить громіздким.

Ефективним методом доведення рівностей з множинами є **метод еквівалентних перетворень.** Його суть полягає у використанні властивостей 1.1 – 5.7 операцій над множинами для зведення однієї частини рівності до іншої чи спрощення обох частин до одного і того ж самого проміжного виразу.

Задача 1.2.5. Методом еквівалентних перетворень довести рівності:

1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;

2) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$;

3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

4) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$;

5) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$;

6) $A \setminus (A \setminus (B \cap C)) = A \cap B \cap C$.

Розв’язання.

1) $\underline{A \cap (B \setminus C)} \overset{4.3}{=} A \cap (B \cap \overline{C}) \overset{2.2}{=} (A \cap B) \cap \overline{C} \overset{4.3}{=} \underline{(A \cap B) \setminus C}$. ■

2) $\underline{A \setminus (A \cap B)} \overset{4.3}{=} A \cap (\overline{A \cap B}) \overset{2.8}{=} A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \overset{2.3}{=}$

$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) \overset{2.7}{=} \varnothing \cup (A \cap \overline{B}) \overset{1.1}{=} (A \cap \overline{B}) \cup \varnothing \overset{1.5}{=}$

$= A \cap \overline{B} \overset{4.3}{=} \underline{A \setminus B}$. ■

3) $\underline{A \setminus (B \cup C)} \overset{4.3}{=} A \cap (\overline{B \cup C}) \overset{1.8}{=} A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \overset{2.2}{=} (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \overset{4.3}{=}$

$= (A \setminus B) \cap \overline{C} \overset{4.3}{=} \underline{(A \setminus B) \setminus C}$. ■

4) $\underline{A \setminus (A \setminus B)} \overset{4.3}{=} A \cap (\overline{A \setminus B}) \overset{4.3}{=} A \cap (\overline{A \cap \overline{B}}) \overset{2.8}{=} A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) \overset{2.3}{=}$

$= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{\overline{B}}) \overset{2.7}{=} \varnothing \cup (A \cap \overline{\overline{B}}) \overset{3.1}{=} \varnothing \cup (A \cap B) \overset{1.1}{=}$

$= (A \cap B) \cup \varnothing \overset{1.5}{=} \underline{A \cap B}$. ■

5) $\underline{(A \setminus B) \cap (A \setminus C)} \overset{4.3}{=} (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) \overset{2.2}{=} ((A \cap \overline{B}) \cap A) \cap \overline{C} \overset{2.1}{=}$

$= ((\overline{B} \cap A) \cap A) \cap \overline{C} \overset{2.2}{=} (\overline{B} \cap (A \cap A)) \cap \overline{C} \overset{2.4}{=} (\overline{B} \cap A) \cap \overline{C} \overset{2.1}{=}$

$= (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} \overset{2.2}{=} A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \overset{1.8}{=} A \cap (\overline{B \cup C}) \overset{4.3}{=}$

$= \underline{A \setminus (B \cup C)}$. ■

6) $\underline{A \setminus (A \setminus (B \cap C))} \overset{4.3}{=} A \setminus (A \cap (\overline{B \cap C})) \overset{4.3}{=} A \cap \overline{(A \cap (\overline{B \cap C}))} \overset{2.8}{=}$

$= A \cap (\overline{A} \cup (\overline{\overline{B \cap C}})) \overset{3.1}{=} A \cap (\overline{A} \cup (B \cap C)) \overset{2.3}{=}$

$$= (A\cap\overline{A})\cup(A\cap(B\cap C)) \overset{2.7}{=} \varnothing\cup(A\cap(B\cap C)) \overset{1.1}{=}$$

$$= (A\cap(B\cap C))\cup\varnothing \overset{1.5}{=} A\cap(B\cap C) \overset{2.2}{=} \underline{A\cap B\cap C}\,.$$ ■

Задача 1.2.6. Методом еквівалентних перетворень довести рівносильність обох означень операції симетричної різниці, тобто довести рівність:

$$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$$

Розв'язання.

$$\underline{(A\setminus B)\cup(B\setminus A)} \overset{4.3}{=} (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}) \overset{1.3}{=} ((A\cap\overline{B})\cup B)\cap$$

$$\cap((A\cap\overline{B})\cup\overline{A}) \overset{1.1}{=} (B\cup(A\cap\overline{B}))\cap(\overline{A}\cup(A\cap\overline{B})) \overset{1.3}{=}$$

$$=((B\cup A)\cap(B\cup\overline{B}))\cap((\overline{A}\cup A)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})) \overset{1.7}{=}$$

$$=((B\cup A)\cap U)\cap(U\cap(\overline{A}\cup\overline{B})) \overset{2.6}{=} (B\cup A)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}) \overset{1.1}{=}$$

$$=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B}) \overset{2.8}{=} (A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)} \overset{4.3}{=}$$

$$=\underline{(A\cup B)\setminus(A\cap B)}\,.$$ ■

У рівностях, що містять операцію симетричної різниці, слід користуватися властивостями 5.1 – 5.7, якщо це можливо, якщо ж ні – позбутися її згідно будь-якого з означень (вдалий вибір при цьому може значно спростити подальші викладки).

Задача 1.2.7. Методом еквівалентних перетворень довести рівності:

1) $A\,\Delta\,(A\cap B)=A\setminus B$;
2) $(A\,\Delta\,B)\cup(A\cap B)=A\cup B$;
3) $A\,\Delta\,(A\,\Delta\,B)=B$.

Розв'язання.

1) $\underline{A\,\Delta\,(A\cap B)} = (A\cup(A\cap B))\setminus(A\cap(A\cap B)) \overset{1.9}{=}$

$$= A\setminus(A\cap(A\cap B)) \overset{2.2}{=} A\setminus((A\cap A)\cap B) \overset{2.4}{=} A\setminus(A\cap B)=\underline{A\setminus B}$$

(дивись задачу 1.2.5). ■

2) $\underline{(A\Delta B)\cup(A\cap B)} = ((A\setminus B)\cup(B\setminus A))\cup(A\cap B) \overset{1.2}{=} (A\setminus B)\cup$

$$\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B) \overset{4.3}{=} (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup(A\cap B) \overset{1.1}{=}$$

$$= (A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}) \overset{2.3}{=} ((A\cap(B\cup\overline{B}))\cup(B\cap\overline{A}) \overset{1.7}{=}$$

$$= (A\cap U)\cup(B\cap\overline{A}) \overset{2.6}{=} A\cup(B\cap\overline{A}) \overset{1.3}{=} (A\cup B)\cap(A\cup\overline{A}) \overset{1.7}{=}$$

$$= (A\cup B)\cap U \overset{2.6}{=} \underline{A\cup B}. \ \blacksquare$$

3) Перший спосіб (оптимальний).

$$\underline{A\Delta(A\Delta B)} \overset{5.2}{=} (A\Delta A)\Delta B \overset{5.4}{=} \varnothing\Delta B \overset{5.1}{=} B\Delta\varnothing \overset{5.5}{=} \underline{B}. \ \blacksquare$$

Другий спосіб.

$$\underline{A\Delta(A\Delta B)} = (A\setminus(A\Delta B))\cup((A\Delta B)\setminus A).$$

Оскільки

$$A\setminus(A\Delta B) = A\setminus((A\setminus B)\cup(B\setminus A)) \overset{4.3}{=} A\cap\overline{((A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}))} \overset{1.8}{=}$$

$$= A\cap((\overline{A\cap\overline{B}})\cap(\overline{B\cap\overline{A}})) \overset{2.8}{=} A\cap((\overline{A}\cup\overline{\overline{B}})\cap(\overline{B}\cup\overline{\overline{A}})) \overset{3.1}{=}$$

$$= A\cap((\overline{A}\cup B)\cap(\overline{B}\cup A)) \overset{2.2}{=} A\cap(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{B}\cup A) \overset{2.1}{=}$$

$$= A\cap(\overline{B}\cup A)\cap(\overline{A}\cup B) \overset{1.1}{=} A\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B) \overset{2.9}{=}$$

$$= A\cap(\overline{A}\cup B) \overset{2.3}{=} (A\cap\overline{A})\cup(A\cap B) \overset{2.7}{=} \varnothing\cup(A\cap B) \overset{1.1,1.5}{=} A\cap B,$$

$$(A\Delta B)\setminus A = ((A\setminus B)\cup(B\setminus A))\setminus A \overset{4.3}{=} ((A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}))\cap\overline{A} \overset{2.1}{=}$$

$$= \overline{A}\cap((A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})) \overset{2.3}{=} (\overline{A}\cap(A\cap\overline{B}))\cup(\overline{A}\cap(B\cap\overline{A})) \overset{2.2}{=}$$

$$= (\overline{A}\cap A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{A}) \overset{2.1}{=} (A\cap\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{A}\cap B) \overset{2.7}{=}$$

$$= (\varnothing\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{A}\cap B) \overset{2.4}{=} (\varnothing\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B) \overset{2.1,2.5}{=}$$

$$= \varnothing\cup(\overline{A}\cap B) \overset{1.1,1.5}{=} \overline{A}\cap B \overset{2.1}{=} B\cap\overline{A},$$

остаточно маємо

$$(A \setminus (A \Delta B)) \cup ((A \Delta B) \setminus A) = (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A}) \overset{2.1}{=}$$

$$= (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) \overset{2.3}{=} B \cap (A \cup \overline{A}) \overset{1.7}{=} B \cap U \overset{2.6}{=} \underline{B}. \ \blacksquare$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 1.2.8. Перевірити рівності графічним методом та довести їх методом двостороннього включення:

1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
3) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
5) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Задача 1.2.9. Використовуючи властивості операцій над множинами, спростити вирази:

1) $(A \cup B) \cup (A \cup \overline{B})$;
2) $(\overline{A \cap \overline{B}}) \cap B$;
3) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$;
4) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$;
5) $(A \cap B \cap M) \cup (A \cap B \cap C \cap M \cap N) \cup (A \cap M \cap \overline{A})$;
6) $((A \cup B) \cap B) \cup (A \cap (A \cap B))$;
7) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C)$;
8) $(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap D)$;
9) $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup \overline{B} \cup C$;
10) $A \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (C \setminus (A \cap C))$;
11) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$.

Задача 1.2.10. Методом еквівалентних перетворень довести рівності:

1) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$;

2) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$;

3) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$;

4) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$;

5) $A \cap (B \setminus C) = B \cap (A \setminus C)$;

6) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$;

7) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

8) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

9) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

10) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

11) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

12) $B \setminus ((B \setminus A) \cup B) = \varnothing$;

13) $A \setminus (A \setminus (A \cap B)) = A \cap B$;

14) $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = B$;

15) $(A \cap B) \setminus (B \setminus A) = A \cap B$;

16) $(A \setminus B) \setminus (B \setminus A) = A \setminus B$;

17) $(A \setminus B) \setminus (\overline{A} \setminus B)) = A \setminus B$;

18) $A \setminus (A \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$;

19) $A \setminus (B \setminus (A \setminus B)) = A \setminus B$;

20) $(A \cup B) \Delta B = A \setminus B$;

21) $(A \setminus B) \Delta (B \setminus A) = A \Delta B$;

22) $(A \cup B) \Delta (A \cap B) = A \Delta B$;

23) $(A \cap B) \Delta (B \setminus A) = B$;

24) $(A \cup B) \Delta (A \setminus B) = B$;

25) $A \Delta (B \setminus A) = A \cup B$;

26) $A \Delta (A \setminus B) = A \cap B$;

27) $B \setminus (A \Delta B) = A \cap B$;

28) $(A \Delta B) \setminus A = B \setminus A$;

29) $A \cap (B \Delta C) =$

$= (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;

30) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

1.3. Формули включення-виключення

Множина називається ***скінченною****, якщо вона містить скінченну кількість елементів.*

Потужністю *скінченої множини називається кількість елементів у цій множині.*

Потужність множини A позначатимемо $|A|$. Нехай, наприклад, $A = \{2,3,7,15\}$, тоді $|A| = 4$.

Формули включення-виключення – формули, що дозволяють знаходити потужність об’єднання декількох скінченних множин.

Формули включення-виключення для двох і трьох скінченних множин мають відповідно вигляд:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| -$$
$$- |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Задача 1.3.1. У науково-дослідному інституті працюють 67 осіб. Із них 47 знають англійську мову, 35 – німецьку мову, 23 – обидві мови. Скільки осіб в інституті не знають ні англійської, ні німецької мови? Скільки знають тільки англійську мову? Скільки знають тільки німецьку мову?

Розв'язання. У даній задачі множина всіх працюючих – універсальна множина U.

Нехай A – множина осіб, що знають англійську мову, H – множина осіб, що знають німецьку мову. Тоді $A \cap H$ – множина осіб, що знають обидві мови, $A \cup H$ – множина осіб, що знають хоча б одну із мов. За умовою, $|U| = 67$, $|A| = 47$, $|H| = 35$, $|A \cap H| = 23$. Тоді хоча б одну мову знають

$$|A \cup H| = |A| + |H| - |A \cap H| = 47 + 35 - 23 = 59 \text{ (осіб)},$$

і, відповідно, жодної мови не знають

$$|U| - |A \cup H| = 67 - 59 = 8 \text{ (осіб)}.$$

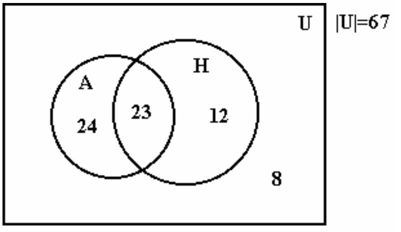
Лише англійську мову знають

$$|A| - |A \cap H| = 47 - 23 = 24 \text{ (особи)},$$

а лише німецьку

$$|H| - |A \cap H| = 35 - 23 = 12 \text{ (осіб)}.$$

Графічний спосіб розв'язання цієї задачі має вигляд



де всередині кожної замкненої частини вказано її потужність. ■

Задача 1.3.2. У науково-дослідному інституті працюють 67 осіб. Із них 47 знають англійську мову, 35 – німецьку, 20 – французьку, 23 – англійську і німецьку, 12 – англійську і французьку, 11 – німецьку і французьку, 5 – усі три іноземні мови. Скільки осіб в інституті не знають жодної із іноземних мов?

Скільки знають тільки англійську мову? Скільки знають тільки німецьку мову? Скільки знають тільки французьку мову?

Розв'язання. Аналогічно попередній задачі, U – множина всіх працюючих, A, H, F – множини осіб, що знають відповідно англійську, німецьку та французьку мови.

Хоча б одну мову знають

$|A \cup H \cup F| = |A| + |H| + |F| - |A \cap H| - |A \cap F| - |H \cap F| +$

$+ |A \cap H \cap F| = 47 + 35 + 20 - 23 - 12 - 11 + 5 = 61$ (особа),

жодної мови не знають

$|U| - |A \cup H \cup F| = 67 - 61 = 6$ (осіб),

лише англійську знають

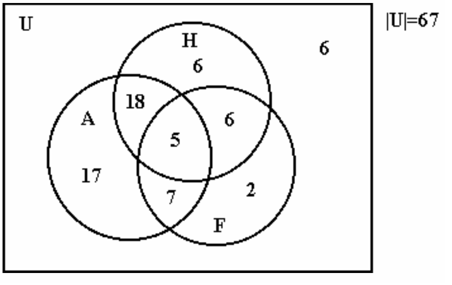
$|A| - |A \cap H| - |A \cap F| + |A \cap H \cap F| = 47 - 23 - 12 + 5 = 17$ (осіб),

лише німецьку

$|H| - |H \cap A| - |H \cap F| + |H \cap A \cap F| = 35 - 23 - 11 + 5 = 6$ (осіб),

лише французьку

$|F| - |F \cap A| - |F \cap H| + |F \cap A \cap H| = 20 - 12 - 11 + 5 = 2$ (особи)



Задачі для самостійної роботи

Задача 1.3.3. В школі навчаються 1400 учнів. З них 1250 вміють кататися на лижах, 952 – на ковзанах. Ні на лижах, ні на ковзанах не вміють кататися 60 учнів. Скільки учнів вміють кататися і на лижах, і на ковзанах ?

Задача 1.3.4. Кожен учень класу – або дівчина, або особа-блондин, або любить математику. В класі 20 дівчат, з них 12 блондинок, причому лише одна блондинка любить математику. Всього в класі 24 особи-блондина, 12 з них люблять математику. В класі 17 учнів, які люблять математику, з них 6 дівчат. Скільки всього учнів в цьому класі ?

Задача 1.3.5. На пікнік поїхали 92 студенти. При цьому бутерброди з ковбасою взяли 47 студентів, з сиром – 38, з маслом – 42, з сиром і ковбасою – 28, з ковбасою і маслом – 31, з сиром і маслом – 26. Всі три види бутербродів взяли 25 студентів, а декілька студентів брали на пікнік не бутерброди, а пиріжки. Скільки студентів брали з собою на пікнік пиріжки ?

Задача 1.3.6. У відділі НДІ працюють декілька осіб, кожна з яких знає хоча б одну іноземну мову. При цьому 6 осіб знають англійську мову, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 – англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – англійську і французьку, 1 – всі три мови. Скільки осіб працюють у відділі? Скільки з них знають лише англійську мову? Лише французьку? Лише німецьку?

Задача 1.3.7. На уроці літератури вчитель зацікавився, хто із 40 учнів класу читав книги A, B і C. Результати виявились такими: книгу A прочитали 25 учнів, книгу B – 22 учні, книгу C – 22 учні, книгу A або книгу B – 33 учні, книгу A або книгу C – 32 учні, книгу B або книгу C – 31 учень, всі три книги – 10 учнів. Скільки учнів не читали жодної книги? Скільки учнів прочитали тільки 1 книгу?

Задача 1.3.8. Серед абітурієнтів, які склали вступні іспити до вузу, оцінку "5" отримали: з математики – 48, з фізики – 37, з української мови – 42, з математики або фізики – 75, з математики або української мови – 76, з фізики або української мови – 66, з усіх трьох предметів – 4. Скільки абітурієнтів отримали хоча б одну п’ятірку ? Скільки з них отримали рівно одну п’ятірку ? А рівно дві п’ятірки ?

Задача 1.3.9. Протягом тижня в кінотеатрі демонструвались фільми X, Y, Z. Кожен із 40 студентів групи бачив або всі три фільми, або тільки якийсь один. При цьому фільм X бачили 13 студентів, фільм Y – 16 студентів, фільм Z – 19 студентів. Скільки студентів бачили усі три фільми?

Задача 1.3.10. Кожен із учнів класу на канікулах два рази був у театрі і бачив дві різні вистави. При цьому вистави I, II, III бачили відповідно 25, 12 і 23 учні. Скільки учнів у класі? Скільки з них бачили вистави I і II, I і III, II і III?

Задача 1.3.11. Скільки натуральних чисел із першої сотні (1, 2, ..., 100) не діляться на жодне із чисел 2, 3, 5?

ТЕМА 2. КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика – розділ дискретної математики, що вивчає розташування об'єктів скінченної множини згідно зі спеціальними правилами і методи підрахунку кількості таких всеможливих розташувань.

2.1. Загальні правила комбінаторики

Базовими правилами комбінаторики є правило суми та правило добутку.

Правило суми. *Нехай A і B – скінченні множини, $|A|=n$, $|B|=m$, $A\cap B=\varnothing$. Очевидно, один елемент x із множини A можна вибрати n різними способами, а один елемент y із множини B можна вибрати m різними способами. Тоді вибрати один елемент або із множини A, або із множини B (здійснити вибір "або x, або y") можна $n+m$ різними способами.*

Задача 2.1.1. В одному ящику містяться 8 пронумерованих білих кульок, а в іншому – 6 пронумерованих чорних. Випадковим чином вибирають одну кульку з будь-якого ящика. Скількома способами це можна зробити ?

Розв'язання. Нехай A – множина білих кульок першого ящика, B – множина чорних кульок другого ящика. Тоді білу кульку можна вибрати 8 способами, чорну – 6 способами, а тому, за правилом суми, маємо 8 + 6 = 14 способів вибрати яку-небудь кульку. ■

Правило добутку. *Нехай A і B – скінченні множини, $|A|=n$, $|B|=m$. Тоді кількість всеможливих впорядкованих пар вигляду (x,y), де $x\in A$, $y\in B$, обчислюється за формулою:*

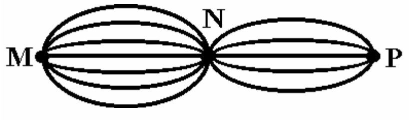
$$N=|A|\cdot|B|=n\cdot m.$$

Правило добутку інколи більш просто формулюють так:

якщо об'єкт x можна вибрати n різними способами і після кожного такого вибору об'єкт y можна вибрати m різними способами, то одночасний вибір об'єктів x і *y у вказаному порядку можна здійснити $n\cdot m$ різними способами.*

Задача 2.1.2. Із міста M в місто N ведуть 7 доріг, а із міста N в місто P – 5 доріг. Скільки шляхів, що проходять через місто N, ведуть із міста M в місто P?

Розв'язання. Нехай A – множина доріг із міста M в місто N, B – множина доріг із міста N в місто P.



Тоді будь-який шлях, що веде із міста M в місто P, можна розглядати як впорядковану пару (x, y), де $x \in A$, $y \in B$, а тому, за правилом добутку, кількість шуканих шляхів дорівнюватиме: $N = 7 \cdot 5 = 35$. ■

Узагальненням правила добутку на випадок будь-якої кількості множин є ***основний принцип комбінаторики (ОПК)***:

якщо $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *– деякі скінченні множини і* $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$, ..., $|A_k| = n_k$, *то кількість всеможливих впорядкованих* k *-ток вигляду* $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})$, *де* $a_{ij} \in A_j$ ($j = \overline{1,k}$), *обчислюється за формулою:*

$$N = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_k| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Задача 2.1.3. Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0-5, якщо:

1) всі цифри числа мають бути різними ?
2) цифри в числі можуть повторюватись ?
3) число має бути парним ?
4) число має бути парним і всі його цифри – різні ?

Розв'язання. $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ – множина допустимих цифр розглядуваних чотиризначних чисел.

Будь-яке чотиризначне число є впорядкованою послідовністю чотирьох цифр, тому йому можна взаємно однозначно поставити у відповідність впорядковану четвірку, елементами якої є цифри цього числа:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \leftrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4).$$

1) Маємо:

$$a_1 \in A_1 = A \setminus \{0\} = \{1,2,3,4,5\}, \quad |A_1| = 5,$$

(перша цифра чотиризначного числа не може бути нулем),

$$a_2 \in A_2 = A \setminus \{a_1\}, \quad |A_2| = 5,$$

(за умовою, друга цифра не може співпадати з першою),

$$a_3 \in A_3 = A \setminus \{a_1, a_2\}, \quad |A_3| = 4,$$

(за умовою, третя цифра не може співпадати з першою і другою),

$$a_4 \in A_4 = A \setminus \{a_1, a_2, a_3\}, \quad |A_4| = 3,$$

(за умовою, четверта цифра не може співпадати з першою, другою і третьою).

Тоді, за ОПК, шуканих чисел існує

$$N_1 = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| = 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300. \ \blacksquare$$

2) В цьому випадку маємо:

$$a_1 \in A_1 = A \setminus \{0\} = \{1,2,3,4,5\}, \quad |A_1| = 5,$$

$$a_2 \in A_2 = A, \ |A_2| = 6,$$

$$a_3 \in A_3 = A, \ |A_3| = 6,$$

$$a_4 \in A_4 = A, \ |A_4| = 6,$$

тому, за ОПК, шуканих чисел існує

$$N_2 = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| = 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080.$$

Зазначимо, що, по суті, щойно ми порахували кількість всеможливих чотиризначних чисел, які можна скласти з цифр 0-5. Згідно з 1), у 300 із них всі цифри будуть різними, а тому, відповідно, у $1080 - 300 = 780$ числах обов'язково будуть повторення цифр. ■

3) Щоб число було парним, його остання цифра повинна бути парною. Міркування в цьому випадку аналогічні випадку 2) з єдиною відмінністю: $a_4 \in A_4 = \{0,2,4\}$, $|A_4| = 3$, тому, за ОПК, шуканих чисел існує

$$N_3 = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| = 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540. \ \blacksquare$$

4) Даний випадок суттєво складніший за попередні, оскільки, здійснюючи викладки за вищенаведеною традиційною схемою, отримуємо:

$$a_1 \in A_1 = A \setminus \{0\} = \{1,2,3,4,5\}, \quad |A_1| = 5,$$

$$a_2 \in A_2 = A \setminus \{a_1\}, \quad |A_2| = 5,$$

$$a_3 \in A_3 = A \setminus \{a_1, a_2\}, \quad |A_3| = 4,$$

$$a_4 \in A_4 = \{0,2,4\} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$$

і неможливо однозначно вказати потужність множини A_4 ("проблема останньої цифри"):

$|A_4| = 3$, якщо раніше не була вибрана жодна з цифр 0,2,4;

$|A_4| = 2$, якщо раніше була обрана якась одна з цифр 0,2,4;

$|A_4| = 1$, якщо раніше були обрані якісь дві з цифр 0,2,4;

$|A_4| = 0$, якщо раніше була обрані усі три цифри 0,2,4.

Щоб уникнути цієї проблеми, необхідно спочатку обирати для числа останню (четверту) цифру, яка є парною, а потім всі інші (першу, другу, третю) цифри.

При цьому необхідно окремо розглядати 2 випадки: $a_4 = 0$ і $a_4 \neq 0$, оскільки в кожному з них по різному рахується кількість способів вибору перших трьох цифр.

а) Розглянемо випадок $a_4 = 0$. Маємо:

$$a_4 \in A_4 = \{0\},\ |A_4| = 1,$$
$$a_1 \in A_1 = A \setminus \{a_4\} = \{1,2,3,4,5\},\quad |A_1| = 5,$$
$$a_2 \in A_2 = A \setminus \{a_4, a_1\} = \{1,2,3,4,5\} \setminus \{a_1\},\quad |A_2| = 4,$$
$$a_3 \in A_3 = A \setminus \{a_4, a_1, a_2\} = \{1,2,3,4,5\} \setminus \{a_1, a_2\},\quad |A_3| = 3,$$

$N_{41} = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ (парних чисел, що закінчуються **на нуль**, у яких всі цифри різні).

б) Розглянемо випадок $a_4 \neq 0$. Маємо:

$$a_4 \in A_4 = \{2,4\},\ |A_4| = 2,$$
$$a_1 \in A_1 = A \setminus \{a_4, 0\},\quad |A_1| = 4,$$
$$a_2 \in A_2 = A \setminus \{a_4, a_1\},\quad |A_2| = 4,$$
$$a_3 \in A_3 = A \setminus \{a_4, a_1, a_2\},\quad |A_3| = 3,$$

$N_{42} = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ (парних чисел, що закінчуються **не на нуль**, у яких всі цифри різні).

Остаточно, за правилом суми, отримуємо, що парних чисел, у яких всі цифри різні, існує:

$$N_4 = N_{41} + N_{42} = 60 + 96 = 156.$$

Наведемо ще один спосіб розв'язання цієї задачі. Для цього скористаємося очевидним ***правилом різниці***:

якщо N – загальна кількість способів, а N_1 – кількість способів, що не володіють певною властивістю, то $N - N_1$ –

кількість способів, що володіють цією властивістю.

Тоді, щоб знайти N_4 – кількість чотиризначних **парних** чисел, у яких всі цифри різні, необхідно від N_1 – раніше підрахованої кількості **всеможливих** чотиризначних чисел, у яких всі цифри різні, відняти N_5 – кількість чотиризначних **непарних** чисел, у яких всі цифри різні:

$$N_4 = N_1 - N_5 .$$

Підрахуємо число N_5 (уникаючи "проблеми останньої цифри", яка тут теж виникає):

$$a_4 \in A_4 = \{1,3,5\}, \ |A_4| = 3,$$
$$a_1 \in A_1 = A \setminus \{a_4, 0\}, \quad |A_1| = 4,$$
$$a_2 \in A_2 = A \setminus \{a_4, a_1\}, \quad |A_2| = 4,$$
$$a_3 \in A_3 = A \setminus \{a_4, a_1, a_2\}, \quad |A_3| = 3,$$
$$N_5 = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 144 .$$

Тоді, за правилом різниці, маємо:

$$N_4 = N_1 - N_5 = 300 - 144 = 156 . \ \blacksquare$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.1.4. Скільки словників потрібно видати, щоб можна було безпосередньо виконувати переклади з будь-якої із п'яти мов – української, англійської, французької, німецької, італійської – на будь-яку іншу з цих мов?

Задача 2.1.5. В ящику 12 різних білих кульок і 10 різних чорних. З нього вибирається біла або чорна кулька, після чого беруть і білу, і чорну кульки. В якому випадку є більша можливість вибору: якщо спочатку було взято білу кульку чи якщо спочатку було взято чорну кульку?

Задача 2.1.6. Є тканини п'яти кольорів: білого, червоного, зеленого, синього та жовтого. Скількома способами з них можна скласти триколірний прапор з горизонтальними смугами однакової ширини ? Ця ж задача, але одна зі смуг повинна бути зеленою ?

Задача 2.1.7. У англійців прийнято давати дітям декілька різних імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо для вибору є 300 імен, а їй дають не більше трьох імен ?

Задача 2.1.8. Автомобільні номери деякої країни складаються з однієї, двох або трьох букв і чотирьох цифр. Скільки різних номерів можна утворити, якщо алфавіт країни містить 33 букви ?

Задача 2.1.9. Скільки існує всеможливих дев'ятизначних чисел ? У скількох із них всі цифри будуть різними ? У скількох із них обов'язково будуть повторення цифр ?

Задача 2.1.10. Скільки чотиризначних чисел, у яких всі цифри різні і серед них обов'язково присутня цифра 1, можна скласти з цифр 0-7 ?

2.2. Вибірки та їх класифікація

За допомогою загальних правил комбінаторики можна розв'язувати різноманітні комбінаторні задачі. Однак, для найбільш типових випадків, досить зручно вивести готові формули знаходження кількості способів розташування об'єктів скінченної множини.

Введемо поняття вибірки, яке є фундаментальним для всіх подальших міркувань.

Нехай задано деяку скінченну множину потужності n:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} .$$

Виконаємо наступну процедуру:

1) на першому кроці з множини A виберемо деякий елемент a_{i1};
2) на другому кроці із множини $A \setminus \{a_{i1}\}$ (з множини, що залишилася) виберемо деякий елемент a_{i2};
3) на третьому кроці із множини $A \setminus \{a_{i1}, a_{i2}\}$ (з множини, що залишилася) виберемо деякий елемент a_{i3};

----

k) на k-му кроці із множини $A \setminus \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i(k-1)}\}$ виберемо деякий елемент a_{ik}.

Тоді сукупність $\{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}\}$ усіх обраних елементів називається k-вибіркою. Згідно з процедурою вибору, у розглядуваній k-вибірці усі елементи обов'язково будуть різними (не можуть повторюватися). Тому таку вибірку називають ***k-вибіркою без повторень.***

Якщо ж на кожному кроці відповідний елемент a_{ij} ($j = \overline{1,k}$) вибирати із усієї множини A, в отриманій k-вибірці можуть бути однакові елементи (елементи можуть повторюватися). Тому таку вибірку називають k ***-вибіркою з повтореннями.***

Досить часто зустрічається не зовсім вірне розуміння терміну ”вибірка з повтореннями”. Тому явно наголосимо, що термін ”вибірка з повтореннями” означає, що у такій вибірці **повторення елементів можуть бути, але не обов’язково повинні бути**. Саме тому серед всеможливих вибірок з повтореннями будуть і такі, що формально співпадають зі всеможливими вибірками без повторень. Звідси одразу ж випливає, що кількість всеможливих k-вибірок з повтореннями буде більшою, ніж кількість всеможливих k-вибірок без повторень.

Вибірка, у якій порядок розташування елементів неістотній, називається ***невпорядкованою.***

Вибірка, у якій задано порядок розташування елементів, називається ***впорядкованою****.*

Таким чином, загалом існує чотири різних типи вибірок:

- **невпорядковані** вибірки **без повторень**;
- **невпорядковані** вибірки **з повтореннями**;
- **впорядковані** вибірки **без повторень**;
- **впорядковані** вибірки **з повтореннями**.

Надалі для кожного із цих чотирьох типів вибірок буде введена відповідна спеціальна назва і виведена формула для підрахунку їх кількості.

Щоб розрізняти впорядковані і невпорядковані вибірки, елементи невпорядкованої вибірки перераховуватимемо у квадратних дужках, наприклад, $[a,b]$, а елементи впорядкованої – у круглих, наприклад, (a,b).

Розглянемо приклад. Нехай $A = \{a,b,c\}$, тоді:

$[a,b],\ [a,c],\ [b,c]$ –

всеможливі **невпорядковані** 2-вибірки **без повторень**;

$(a,b),\ (b,a),\ (a,c),\ (c,a),\ (b,c),\ (c,b)$ –

всеможливі **впорядковані** 2-вибірки **без повторень**;

$[a,b],\ [a,c],\ [b,c],\ [a,a],\ [b,b],\ [c,c]$ –

всеможливі **невпорядковані** 2-вибірки **з повтореннями**;

$(a,b),\ (b,a),\ (a,c),\ (c,a),\ (b,c),\ (c,b),\ (a,a),\ (b,b),\ (c,c)$ –

всеможливі **впорядковані** 2-вибірки **з повтореннями**.

На завершення введемо також потрібне в подальшому поняття факторіала: ***факторіалом*** *натурального числа* n *називається добуток всіх натуральних чисел від* 1 *до* n *включно:*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n .$$

Оскільки при $n > 1$ виконується рівність $n! = (n-1)! \cdot n$, то для того, щоб вона виконувалась при $n = 1$, формально вважають, що $0! = 1$.

2.3. Сполуки

Розглянемо деяку скінченну множину потужності n, наприклад, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Нехай k – довільне ціле число, таке, що $0 \le k \le n$.

Сполукою із n ***по*** k *називається невпорядкована* k*-вибірка без повторень із множини потужності* n.

Нехай, наприклад, $A = \{a, b, c\}$, тоді всеможливі сполуки із 3 по 2 мають вигляд: $[a,b],\ [a,c],\ [b,c]$.

Очевидно, кожна сполука із n по k є деякою звичайною (невпорядкованою) k-елементною підмножиною n-елементної множини.

Будь-які дві сполуки із n по k відрізняються хоча б одним елементом (оскільки порядок розташування елементів у них неістотний).

Кількість всеможливих сполук із n *по* k *позначається* C_n^k *і обчислюється за формулою:*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Властивості сполук:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$ для будь-якого $0 \le k \le n$;

2) $C_n^k = \dfrac{n-k+1}{k} C_n^{k-1}$ для будь-якого $1 \le k \le n$;

3) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ для будь-якого $1 \le k \le n-1$.

Задача 2.3.1. Із 52 осіб треба утворити делегацію, яка складається з 5 осіб. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. Для утворення будь-якої делегації необхідно вибрати 5 **різних** осіб із 52, причому порядок їх вибору **неістотній**. Тоді кожна делегація буде невпорядкованою *5*-вибіркою без повторень із *52* (сполукою із *52* по *5*), а тому існуватиме $C_{52}^{5} = \dfrac{52!}{5!\cdot 47!} = \dfrac{48\cdot 49\cdot 50\cdot 51\cdot 52}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 2598960$ різних способів утворити делегацію. ■

Задача 2.3.2. Скількома способами з натуральних чисел від 1 до 31 можна вибрати 3 різних числа так, щоб їх сума була парною ?

Розв'язання. Серед натуральних чисел від 1 до 31 є 16 непарних і 15 парних.

Сума трьох вибраних із них чисел буде парною лише у двох випадках:

1) всі три числа є парними;
2) одне число – парне, а інші два – непарні.

Підрахуємо спочатку, скількома різними способами можна здійснювати вибір у кожному із цих випадків.

1) Вибрати 3 різні парні числа можна

$$N_1 = C_{15}^{3} = 455 \text{ способами.}$$

2) Вибрати одне парне число можна $C_{15}^{1} = 15$ способами, а два різні непарні – $C_{16}^{2} = 120$ способами. Тому, за правилом добутку, одночасно вибрати одне парне і два непарні числа можна

$$N_2 = C_{15}^{1} C_{16}^{2} = 1800 \text{ способами.}$$

Тоді остаточно, за правилом суми, загальна кількість шуканих способів дорівнює:

$$N = N_1 + N_2 = C_{15}^{3} + C_{15}^{1} C_{16}^{2} = 2255\,. \ ■$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.3.3. Скількома способами з 30 спортсменів можна сформувати команду з 4 осіб для участі в забігу на 100 м ?

Задача 2.3.4. У одного студента є 7 різних книг з математики, а у іншого – 9. Скількома способами вони можуть обмінятися:

1) однією книгою (кожен дає одну свою книгу іншому)?
2) двома книгами (кожен дає дві свої книги іншому)?

Задача 2.3.5. 5 дівчат і 3 юнаки хочуть грати у футбол. Скількома способами вони можуть поділитися на дві команди по 4 гравці, якщо у кожній команді повинен бути хоча б 1 юнак ?

Задача 2.3.6. Скількома способами із повної колоди (52 карти) можна витягнути 10 карт так, щоб серед них були:

1) рівно 1 туз ?
2) хоча б 1 туз ?
3) рівно 2 тузи ?
4) не менше 2 тузів ?

Задача 2.3.7. При грі в доміно чотири гравці ділять порівну 28 кісточок. Скількома способами вони можуть це зробити ?

Задача 2.3.8. Скількома способами можна вибрати 12 осіб із 17, якщо задані дві не можуть бути обрані одночасно ?

Задача 2.3.9. Із групи, що містить 7 чоловіків і 4 жінки, треба вибрати 6 осіб так, щоб серед них було не менше 2 жінок. Скількома способами це можна зробити ?

Задача 2.3.10. Скількома способами із неповної колоди (36 карт) можна витягнути 5 карт так, щоб серед них були туз, король і дама однієї масті ?

Задача 2.3.11. Скількома способами із 15 осіб можна сформувати бригаду для роботи (до складу бригади можуть входити від 1 до 15 осіб) ?

Задача 2.3.12. Скільки різних дільників (включаючи 1 і 2310) має число 2310 ? (Вказівка: скористатися розкладом цього числа на прості множники).

Задача 2.3.13. Скільки різних добутків, кратних 10, можна утворити з чисел 2, 3, 5, 7, 11, 13, якщо кожне число може входити у добуток не більше одного разу ?

Задача 2.3.14. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник ?

2.4. Розміщення

Розглянемо деяку скінченну множину потужності n, наприклад, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Нехай k – довільне ціле число, таке, що $0 \le k \le n$.

Розміщенням із n ***по*** k *називається впорядкована* k*-вибірка без повторень із множини потужності* n.

Нехай, наприклад, $A = \{a, b, c\}$, тоді всеможливі розміщення із 3 по 2 мають вигляд: (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b).

Очевидно, кожне розміщення із n по k є деякою впорядкованою k-елементною підмножиною n-елементної множини. Будь-які два розміщення із n по k відрізняються або самими елементами, або порядком їх розташування.

Кількість всеможливих розміщень із n *по* k *позначається* R_n^k *і обчислюється за формулою:*

$$R_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Задача 2.4.1. Скільки словників потрібно видати, щоб можна було безпосередньо виконувати переклади з будь-якої із п'яти мов – української, англійської, французької, німецької, італійської – на будь-яку іншу з цих мов?

Розв'язання. По суті, необхідно підрахувати кількість всеможливих відповідних двомовних словників.

Кожен словник однозначно визначається його назвою.

Для утворення назви довільного словника необхідно вибрати 2 **різні** мови із 5, причому надалі буде **істотнім** порядок їх розташування в назві цього словника. Тоді назва кожного словника буде впорядкованою *2*-вибіркою без повторень із *5* (розміщенням із *5* по *2*), а тому існуватиме $N = R_5^2 = \frac{5!}{3!} = 4\cdot 5 = 20$ всеможливих різних двомовних словників. ■

Задача 2.4.2. Скільки існує всеможливих п'ятизначних чисел, у яких всі цифри різні?

Розв'язання. З умови випливає, що для утворення п'ятизначних чисел можна використовувати всі 10 існуючих цифр: 0, 1, 2, ..., 9.

П'ятизначні числа, у яких всі цифри різні, будуть отримуватися як розміщення із цих 10 цифр по 5.

Кількість таких всеможливих розміщень дорівнюватиме $N = R_{10}^{5} = \dfrac{10!}{5!} = 30240$, однак серед них будуть такі, де нуль потрапив на перше місце, а тому відповідні числа насправді будуть уже чотиризначними.

Кількість розміщень із 10 по 5, де нуль потрапив на перше місце (кількість отриманих чотиризначних чисел), дорівнюватиме кількості розміщень із 9 цифр (1, 2, ..., 9) по 4: $N_1 = R_9^4 = \dfrac{9!}{5!} = 3024$, тому, за правилом різниці, остаточно знаходимо кількість шуканих чисел:

$$N - N_1 = R_{10}^{5} - R_9^4 = 30240 - 3024 = 27216 . \ \blacksquare$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.4.3. Скількома способами з 30 спортсменів можна сформувати команду з 4 осіб для участі в естафеті 100 + 200 + 400 + 800 м ?

Задача 2.4.4. У англійців прийнято давати дітям декілька різних імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо для вибору є 300 імен, а їй дають не більше трьох імен ?

Задача 2.4.5. Є тканини п'яти кольорів: білого, червоного, зеленого, синього та жовтого. Скількома способами з них можна скласти триколірний прапор з горизонтальними смугами однакової ширини ? Ця ж задача, але одна зі смуг повинна бути зеленою ?

Задача 2.4.6. У трьох студентів є 4 різних чашки, 5 різних блюдечок і 6 різних чайних ложечок. Скількома способами вони можуть накрити стіл для чаювання (кожен студент має отримати одну чашку, одне блюдечко та одну ложечку) ?

Задача 2.4.7. Автомобільні номери деякої країни складаються з однієї, двох або трьох різних букв і чотирьох різних цифр. Скільки різних номерів можна утворити, якщо алфавіт країни містить 33 букви ?

Задача 2.4.8. Скільки шестизначних чисел, у яких всі цифри різні, можна скласти з цифр:

1) 1 – 7 ?
2) 0 – 7 ?

2.5. Перестановки

Розглянемо деяку скінченну множину потужності n, наприклад, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

*n**-перестановкою** називається впорядкована n-вибірка без повторень із множини потужності n.*

Нехай, наприклад, $A = \{a, b, c\}$, тоді всеможливі 3-перестановки мають вигляд:

$$(a, b, c),\ (a, c, b),\ (b, a, c),\ (b, c, a),\ (c, a, b),\ (c, b, a).$$

Очевидно, кожна n-перестановка є певним способом впорядкування n-елементної множини. Будь-які дві n-перестановки відрізняються лише порядком розташування елементів (оскільки кожна з них містить всі n елементів вихідної множини).

По суті, n-перестановки є розміщеннями із n по n.

Кількість всеможливих n-перестановок позначається P_n і обчислюється за формулою:

$$P_n = R_n^n = n!.$$

Задача 2.5.1. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ так, щоб парні числа стояли на парних місцях ?

Розв'язання. В розглядуваній множині маємо n парних і n непарних чисел, n парних і n непарних місць. n парних чисел можна розставити на n парних місцях $P_n = n!$ способами. Аналогічно, n непарних чисел можна розставити на n непарних місцях теж $P_n = n!$ способами. Оскільки будь-який спосіб розстановки парних чисел можна поєднувати із будь-яким способом розстановки непарних, згідно з ОПК, всеможливих способів шуканого впорядкування розглядуваної множини існує $N = P_n \cdot P_n = (n!)^2$. ■

Задача 2.5.2. Скількома способами можна скласти список виступу 5 ораторів А, Б, В, Г, Д, якщо:

1) Б не повинен виступати попереду А ?
2) А повинен виступити безпосередньо перед В ?

Розв'язання. Якщо не накладати жодних обмежень, то список виступу 5 ораторів А, Б, В, Г, Д є 5-перестановкою, а тому його можна скласти $P_5 = 5! = 120$ різними способами.

1) Назвемо "двійниками" пару списків, у яких повністю співпадає розташування ораторів В, Г, Д, а оратори А і Б розташовуються на одній і тій самі парі місць, але в різному порядку (наприклад, В**А**Д**Б**Г і В**Б**Д**А**Г, ВГ**АБ**Д і ВГ**БА**Д, **АБ**ДВГ і **БА**ДВГ, ГДВ**АБ** і ГДВ**БА**). При цьому в кожній парі "двійників" потрібну умову задовольнятиме лише один список.

Оскільки 120 всеможливих списків можна розбити на 60 пар "двійників", отримуємо, що існує 60 списків, де Б не виступатиме попереду А. ■

2) За умовою, нас цікавлять всеможливі списки, де після виступу оратора А одразу ж виступає оратор В, тобто списки зі фрагментом АВ (наприклад, Д**АВ**БГ, **АВ**БДГ, ГБД**АВ**). Тоді можна розглядати фрагмент АВ як одного оратора і, відповідно, усі потрібні списки отримувати з допомогою всеможливих перестановок чотирьох ораторів: Б, Г, Д і АВ. Таким чином, шуканих списків існуватиме $P_4 = 4! = 24$. ■

Задача 2.5.3. Скількома способами 15 хлопців і 10 дівчат можна вишикувати так, щоб усі дівчата стояли поряд ?

Розв'язання. Якщо усі дівчата стоять поряд, їх можна розглядати як єдине ціле (як один елемент). Тоді цей елемент і 15 хлопців можна вишикувати $P_{16} = 16!$ способами. Оскільки 10 дівчат поряд можна вишиковувати $P_{10} = 10!$ різними способами, остаточно маємо $P_{16} P_{10} = 16! \cdot 10!$ шуканих способів. ■

Задача 2.5.4. Скільки різних "слів", у яких друга, четверта і шоста букви – приголосні, можна отримати, переставляючи букви в слові "логарифм" ?

Розв'язання. Слово "логарифм" містить 8 букв: 5 приголосних ("л", "г", "р", "ф", "м") і 3 голосні ("о", "а", "и"). Тому шукані слова отримуватимуться внаслідок відповідного заповнення цими буквами 8 пронумерованих місць.

Вибрати 3 приголосні букви із п'яти і розставити їх на вказаних (другому, четвертому і шостому) місцях можна $R_5^3 = 60$ способами. Якщо певним способом це виконано, залишається розставити на п'яти вільних місцях (першому, третьому, п'ятому, сьомому і восьмому) 5 букв (2 приголосні, що залишилися, і 3 голосні), а це можна зробити $P_5 = 5! = 120$ способами. Тоді, за ОПК, існуватиме $R_5^3 P_5 = 60 \cdot 120 = 7200$ шуканих слів. ■

Задача 2.5.5. Скількома способами можна розсадити за круглий стіл 8 осіб так, щоб вказані дві особи не сиділи поруч ?

Розв'язання. Пронумеруємо всі 8 місць за столом. Тоді будь-який спосіб розсаджування восьми осіб за столом є 8-перестановкою, а тому кількість всеможливих способів розсаджування восьми осіб дорівнюватиме $N = P_8 = 8! = 40320$.

Підрахуємо тепер N_1 – кількість таких способів розсаджування восьми осіб, щоб вказані дві особи сиділи поруч. Перш за все, сусідні місця за столом для цих двох осіб можна вибрати 8 способами (1 і 2, 2 і 3, 3 і 4, ..., 7 і 8, 8 і 1). Оскільки при цьому на двох обраних місцях їх можна розсаджувати $P_2 = 2$ способами, то матимемо $8 \cdot P_2 = 16$ способів посадити двох вказаних осіб поруч за столом. Якщо їх посаджено поруч, решту 6 осіб на шести вільних місцях за столом можна розсаджувати $P_6 = 720$ способами. Тоді, за ОПК, $N_1 = 8 \cdot P_2 \cdot P_6 = 11520$.

Використовуючи правило різниці, знаходимо кількість способів розсаджування восьми осіб за столом так, щоб вказані дві особи не сиділи поруч:

$$N - N_1 = P_8 - 8 \cdot P_2 \cdot P_6 = 40320 - 11520 = 28800 .$$ ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.5.6. Скількома способами можна розставити на шахівниці 8 однакових тур ? А розставити так, щоб вони не били одна одну ?

Задача 2.5.7. Скількома способами можна впорядкувати множину {1,2,3,4,5,6,7} так, щоб усі парні цифри стояли поряд ? А впорядкувати так, щоб усі непарні цифри стояли поряд ?

Задача 2.5.8. Скільки існує перестановок з n різних елементів a, b, c, ..., у яких:

1) елементи a і b не стоять поряд ?
2) елементи a, b і c не стоять одночасно поряд ?

Задача 2.5.9. Скільки семизначних чисел, у яких всі цифри різні і всі парні цифри не стоять одночасно поруч, можна скласти з цифр 1-7 ?

Задача 2.5.10. Скільки шестизначних чисел, у яких всі цифри різні і серед них обов'язково присутні 2, 7, 9, можна скласти з цифр 1-9 ?

Задача 2.5.11. Скільки семизначних чисел, у яких всі цифри різні і серед них обов'язково присутні 1, 3, 5, можна скласти з цифр 0-9 ?

Задача 2.5.12. У купе залізничного вагону є 2 протилежних дивани по 5 місць. З 10 пасажирів 4 бажають сидіти обличчям до тепловозу, 3 – спиною, іншим трьом – байдуже як сидіти. Скількома способами можуть розміститися пасажири ?

Задача 2.5.13. На шкільному вечорі присутні 12 дівчат і 15 юнаків. Скількома способами з них можна скласти 4 пари для танцю?

Задача 2.5.14. Скількома способами можна розсадити за круглий стіл 5 чоловіків і 5 жінок так, щоб ніякі дві особи однієї статі не сиділи поруч ? Ця ж задача, але вони сідають на карусель, і способи, що переходять один в одного при обертанні каруселі, вважаються співпадаючими ?

Задача 2.5.15. Скільки різних намист можна складати з семи різних намистин, якщо у кожному намисті повинні бути використані всі 7 намистин ?

2.6. Сполуки з повтореннями

Розглянемо деяку скінченну множину потужності n, наприклад, $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Нехай $k\ge 0$ – довільне ціле число.

Сполукою з повтореннями із *n* ***по*** *k називається невпорядкована k-вибірка з повтореннями із множини потужності n.*

Нехай, наприклад, $A=\{a,b,c\}$, тоді всеможливі сполуки повтореннями із 3 по 2 мають вигляд:

$$[a,b],\ [a,c],\ [b,c],\ [a,a],\ [b,b],\ [c,c].$$

Будь-які дві сполуки з повтореннями із n по k відрізняються хоча б одним елементом.

Наголосимо, що число k може бути навіть більшим за n. Нехай, як і вище, $A=\{a,b,c\}$, тоді $[a,b,c,c,b]$ – одна із можливих сполук з повтореннями із 3 по 5.

Кількість всеможливих сполук з повтореннями із n по k позначається $\overline{C}_n^k$ *і обчислюється за формулою:*

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Число $\overline{C}_n^k$ має також і інші комбінаторні тлумачення.

<u>Твердження 2.6.1</u>. $\overline{C}_n^k$ *– кількість способів, якими можна розподілити* k *однакових об'єктів (предметів) між* n *різними ящиками (особами).*

<u>Твердження 2.6.2</u>. $\overline{C}_n^k$ *– кількість розв'язків рівняння* $x_1+x_2+\ldots+x_n=k$ *в цілих невід'ємних числах.*

Задача 2.6.1. В кондитерському магазині продаються 4 сорти пиріжків. Скількома способами можна купити 7 пиріжків ?

Розв'язання. Щоб купити 7 пиріжків, по суті, необхідно 7 разів здійснити вибір сорту із чотирьох можливих. При цьому порядок вибору **неістотній** і при виборі **можна повторюватися** (більше того, оскільки $7>4$, повторення будуть гарантовано). Тоді кожен спосіб покупки 7 пиріжків буде невпорядкованою 7-вибіркою з повтореннями із 4 (сполукою з повтореннями із 4 по 7) а тому існуватиме $\overline{C}_4^7 = C_{10}^7 = 120$ різних способів здійснити покупку. ■

Задача 2.6.2. Скількома способами можна поділити 10 білих грибів, 15 підберезників і 8 підосичників між 4 людьми, якщо гриби кожного сорту вважаються між собою однаковими ?

Розв'язання. Згідно з твердженням 2.6.1, четверо людей можуть окремо розподілити між собою:

- 10 однакових білих грибів – $\overline{C}_4^{10} = C_{13}^{10}$ способами,
- 15 однакових підберезників – $\overline{C}_4^{15} = C_{18}^{15}$ способами,
- 8 однакових підосичників – $\overline{C}_4^{8} = C_{11}^{8}$ способами.

Оскільки будь-який спосіб розподілу білих грибів можна поєднувати з будь-яким способом розподілу підберезників і будь-яким способом розподілу підосичників, то, за ОПК, існуватиме $\overline{C}_4^{10}\overline{C}_4^{15}\overline{C}_4^{8} = C_{13}^{10}C_{18}^{15}C_{11}^{8} = 38507040$ шуканих способів одночасного розподілу всіх грибів. ■

Задача 2.6.3. Скількома способами 12 однакових яблук можна розкласти у 5 різних пакетів, якщо жоден з них не повинен бути порожнім ?

Розв'язання. Якби не накладалося обмеження на відсутність порожніх пакетів, то кількість всеможливих способів розподілу 12 однакових яблук між 5 різними пакетами, згідно з твердженням 2.6.1, дорівнювала б $\overline{C}_5^{12} = C_{16}^{12} = 1820$.

Щоб при розподілах гарантувати відсутність порожніх пакетів, виберемо 5 однакових яблук із 12 (очевидно, це можна зробити єдиним чином) і покладемо по одному у кожен пакет (внаслідок однаковості яблук, це теж можна зробити єдиним чином). Тоді задача зводиться уже до <u>всеможливих</u> способів розподілу 7 однакових яблук, що залишилися, між п'ятьма різними пакетами, а це, згідно з твердженням 2.6.1, можна зробити $\overline{C}_5^{7} = C_{11}^{7} = 330$ різними способами. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.6.4. У поштовому відділенні продаються листівки 10 сортів. Скількома способами можна придбати:

1) 12 листівок ?
2) 8 листівок ?
3) 8 різних листівок ?

Задача 2.6.5. 30 депутатів голосують за 5 пропозицій. Скількома способами можуть розподілитися голоси, якщо кожний депутат голосує лише за одну пропозицію і враховується тільки кількість голосів, поданих за кожну пропозицію?

Задача 2.6.6. Скільки різних неправильних дробів (у яких чисельник $\geq$ знаменника) можна скласти з чисел 3, 5, 7, 8, 11, 13, 17 ?

Задача 2.6.7. Двоє дівчат зібрали 10 однакових ромашок, 15 однакових волошок і 14 однакових фіалок. Скількома способами вони можуть їх розподілити між собою ?

Задача 2.6.8. У книжковому магазині продаються книги чотирьох різних назв. Скількома способами можна купити 8 книг, якщо купується хоча б одна книга кожної назви?

Задача 2.6.9. Скількома способами можна розкласти k однакових куль у n різних урн ($k \geq n$) так, щоб не було порожніх урн ?

Задача 2.6.10. Скількома способами число 100 можна подати у вигляді суми трьох невід'ємних цілих чисел ? А у вигляді суми трьох натуральних ?

2.7. Розміщення з повтореннями

Розглянемо деяку скінченну множину потужності n, наприклад, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Нехай $k \geq 0$ – довільне ціле число.

***Розміщенням з повтореннями із** n **по** k називається впорядкована k-вибірка з повтореннями із множини потужності n.*

Нехай, наприклад, $A = \{a, b, c\}$, тоді всеможливі розміщення з повтореннями із 3 по 2 мають вигляд:

$$(a,b),\ (b,a),\ (a,c),\ (c,a),\ (b,c),\ (c,b),\ (a,a),\ (b,b),\ (c,c).$$

Наголосимо, що число k може бути навіть більшим за n. Нехай, як і вище, $A = \{a, b, c\}$, тоді (a,b,a,c,b) – одне із можливих розміщень з повтореннями із 3 по 5 .

Кількість всеможливих розміщень з повтореннями із n по k позначається $\overline{R}_n^k$ і обчислюється за формулою:

$$\overline{R}_n^k = n^k.$$

Число $\overline{R}_n^k$ має також і інше комбінаторне тлумачення.

<u>**Твердження 2.7.1.**</u> $\overline{R}_n^k$ – *кількість способів, якими можна розподілити* k *різних об'єктів (предметів) між* n *різними ящиками (особами).*

Задача 2.7.1. Камера схову містить 5 дисків, на кожний з яких нанесено 12 букв. Секретне слово при закриванні камери утворюється шляхом вибору на кожному із дисків однієї букви. Яку найбільшу кількість невдалих спроб відкрити камеру може виконати людина, що не знає секретного слова ?

Розв'язання. Кожне секретне слово є впорядкованою 5-вибіркою з повтореннями із 12 букв (розміщенням з повтореннями із 12 по 5), а тому існуватиме $\overline{R}_{12}^5 = 12^5 = 248832$ всеможливих різних секретних слів. Отже, в найгіршому випадку, невдалих спроб може бути виконано $\overline{R}_{12}^5 - 1 = 248831$. ■

Задача 2.7.2. У деякій країні немає двох жителів з однаковим набором зубів. Якою може бути максимальна чисельність населення цієї країни, якщо найбільша кількість зубів у людини дорівнює 32?

Розв'язання. Скористаємось принципом кодування: ставитимемо кожному зубу у відповідність 1, якщо він присутній у наборі, і 0 – якщо відсутній. Тоді кожний набір зубів буде розміщенням з повторенням із 2 по 32, кількість яких дорівнює $\overline{R}_2^{32} = 4294967296$. Отже, максимальна чисельність населення розглядуваної країни може дорівнювати 4294967296 осіб. ■

Задача 2.7.3. Автомобільні номери деякої країни складаються з однієї, двох або трьох букв і чотирьох цифр. Скільки різних номерів можна утворити, якщо алфавіт країни містить 33 букви ?

Розв'язання. За умовою, в розглядуваній країні є допустимими три типи автомобільних номерів:

1) номери, що складаються з трьох букв і чотирьох цифр;
2) номери, що складаються з двох букв і чотирьох цифр;
3) номери, що складаються з однієї букви і чотирьох цифр.

Підрахуємо спочатку кількість всеможливих номерів першого типу. Окремо сформувати 3-буквенну і 4-цифрову складові для номера, очевидно, можна $\overline{R}_{33}^{3}=33^3$ і $\overline{R}_{10}^{4}=10^4$ способами відповідно. Тоді, за правилом добутку, існуватиме $N_1=\overline{R}_{33}^{3}\cdot\overline{R}_{10}^{4}=33^3\cdot 10^4$ всеможливих номерів першого типу.

Міркуючи аналогічно, знаходимо кількості всеможливих номерів другого та третього типів:

$$N_2=\overline{R}_{33}^{2}\cdot\overline{R}_{10}^{4}=33^2\cdot 10^4,$$

$$N_3=\overline{R}_{33}^{1}\cdot\overline{R}_{10}^{4}=33\cdot 10^4.$$

Остаточно, за правилом суми, отримуємо загальну кількість всеможливих автомобільних номерів розглядуваної країни:

$$N=N_1+N_2+N_3=33^3\cdot 10^4+33^2\cdot 10^4+33\cdot 10^4=370590000. \ \blacksquare$$

Задача 2.7.4. Поїзд з n пасажирами робить m зупинок. Скількома способами пасажири можуть розподілитися між зупинками ?

Розв'язання. Скориставшись твердженням 2.7.1, отримуємо, що існує $\overline{R}_{m}^{n}=m^n$ всеможливих способів розподілу. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.7.5. Двійковий набір $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ є впорядкованою n-вибіркою з повторенням із множини $E_2=\{0,1\}$. Скільки існує таких всеможливих двійкових наборів?

Задача 2.7.6. Скільки різних комбінацій сигналів можуть дати m світлофорів, якщо кожен світлофор може перебувати в трьох станах: червоному, жовтому і зеленому?

Задача 2.7.7. Скількома способами із повної колоди (52 карти) можна витягнути по одній карті кожної масті? Те ж саме за умови, що серед витягнутих карт немає жодної пари однакових, тобто двох тузів, двох королів і т.д.

Задача 2.7.8. У змаганнях беруть участь 10 спортсменів, за виступами яких спостерігають троє суддів. Після завершення змагань кожен суддя вказує найкращого на його думку спортсмена. Переможцем змагань оголошується той спортсмен, якого назвуть хоча б двоє суддів. У скількох випадках із всіх можливих переможець буде визначений ?

Задача 2.7.9. Кожна буква азбуки Морзе – це послідовність крапок і тире. Скільки різних букв можна скласти, якщо використовувати для кожної із них:

1) 5 символів ?
2) не більше, ніж 5 символів ?

Задача 2.7.10. Скільки цілих чисел, менших за мільйон, можна скласти з цифр 7, 8, 9 ?

Задача 2.7.11. Скільки цілих чисел, менших за мільйон, можна скласти з цифр 7, 8, 9, 0 ?

2.8. Перестановки з повтореннями

n-перестановкою з повтореннями *називається будь-який спосіб впорядкування сукупності з n елементів, що містить n_1 однакових між собою елементів першого типу, n_2 однакових між собою елементів другого типу, ..., n_k однакових між собою елементів k-го типу, де $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.*

Нехай, наприклад, маємо сукупність $\{a, a, b, b\}$ ($n = 4$, $n_1 = 2$, $n_1 = 2$), тоді всеможливі 4-перестановки з повтореннями мають вигляд:

(a, a, b, b), (a, b, a, b), (a, b, b, a), (b, b, a, a), (b, a, b, a), (b, a, a, b).

Кількість різних n-перестановок з повтореннями, які можна утворити з n елементів, серед яких є n_1 однакових елементів першого типу, n_2 однакових елементів другого типу, ..., n_k однакових елементів k-го типу ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$), позначається $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ і обчислюється за формулою:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Число $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ має також і інше комбінаторне тлумачення.

Твердження 2.8.1. $P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ *– кількість способів, якими можна розподілити n різних об'єктів (предметів) між k різними* *ящиками (особами) так, щоб до i-го ящика потрапило рівно n_i предметів ($i = \overline{1,k}$).*

Задача 2.8.1. Скільки різних "слів" можна отримати, переставляючи букви в слові "Міссісіпі"?

Розв'язання. Слово "Міссісіпі" містить однакові букви, тому шукані слова будуть перестановками з повтореннями. Маємо сукупність із 9 букв ($n = 9$), що містить 4 типи букв: перший тип – буква "і", $n_1 = 4$; другий тип – буква "с", $n_2 = 3$; третій тип – буква "м", $n_3 = 1$; четвертий тип – буква "п", $n_4 = 1$. Отже, шуканих слів існуватиме $P_9(4,3,1,1) = \frac{9!}{4!\,3!} = 2520$. ■

Задача 2.8.2. Скільки різних "слів", у яких буква "п" йде безпосередньо після букви "о", можна отримати, переставляючи букви в слові "опоссум" ?

Розв'язання. За умовою, всі шукані слова повинні містити фрагмент "оп", тому його можна розглядати як єдине ціле (як одну букву). Тоді всі шукані слова будуть перестановками з повтореннями із 6 елементів – "оп", "о", "с", "с", "у", "м", а тому їх кількість дорівнюватиме $P_6(2,1,1,1,1) = 360$. ■

Задача 2.8.3. Скільки різних "слів", у яких 4 букви "е" не стоять одночасно поряд, можна отримати, переставляючи букви в російському слові "перешеек" ?

Розв'язання. Очевидно, переставляючи букви в слові "перешеек", можна отримати $P_8(4,1,1,1,1) = 1680$ всеможливих слів.

Міркуючи аналогічно попередній задачі, знаходимо, що у $P_5(1,1,1,1,1) = P_5 = 5! = 120$ із них усі 4 букви "е" стоятимуть поряд.

Отже, за правилом різниці, шуканих слів існуватиме:

$$P_8(4,1,1,1,1) - P_5 = 1680 - 120 = 1560. \ ■$$

Задача 2.8.4. При грі в доміно чотири гравці ділять порівну 28 кісточок. Скількома різними способами вони можуть це зробити ?

Розв'язання. Скориставшись твердженням 2.8.1, отримуємо, що існує $P_{28}(7,7,7,7) = \frac{28!}{(7!)^4}$ всеможливих способів розподілу. ■

Задача 2.8.5. Скількома способами можна розкласти 20 різних книг у книжкову шафу з 5 полицями, якщо кожна полиця може вмістити навіть усі 20 книг і є істотним порядок розташування книг на полицях?

Розв'язання. Додамо до 20 різних книг 4 однакові розділяючі предмети і розглянемо всеможливі перестановки отриманих об'єктів. Їх кількість дорівнюватиме

$$P_{24}(4,\underbrace{1,1,1,1,...,1}_{20}) = \frac{24!}{4!} = 23!.$$

Кожна перестановка даватиме рівно один спосіб шуканого заповнення книжкової шафи: книги, що стоять до першого розділяючого предмета – в такому ж порядку ставляться на першу полицю, між першим і другим – на другу, між другим і третім – на третю, між третім і четвертим – на четверту, книги, що стоять після четвертого розділяючого предмета – на п'яту полицю:

$$\underbrace{.......}_{I}\ \Delta\ \underbrace{.........}_{II}\ \Delta\ \underbrace{.........}_{III}\ \Delta\ \underbrace{.........}_{IV}\ \Delta\ \underbrace{............}_{V}\ .$$

Зауважимо, що розділяючі предмети бралися однаковими, бо важливо лише, на яких місцях у перестановці вони знаходитимуться, а порядок їх розташування на цих місцях неістотній. ■

Задача 2.8.6. Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з цифр числа 123153 ?

Розв'язання. Для утворення чотиризначних чисел можна використовувати:

1) чотири різні цифри (1 варіант: 1,2,3,5);
2) чотири цифри, серед яких є пара однакових (6 варіантів: 1,1,2,3 / 1,1,2,5 / 1,1,3,5 / 3,3,1,2 / 3,3,1,5 / 3,3,2,5);
3) чотири цифри, серед яких дві пари однакових (1 варіант: 1,1,3,3).

В кожному із цих випадків можна буде скласти відповідно $N_1 = P_4$, $N_2 = 6P_4(2,1,1)$, $N_3 = P_4(2,2)$ чисел.

Отже, за правилом суми, всього можна скласти

$$N = N_1 + N_2 + N_3 = P_4 + 6P_4(2,1,1) + P_4(2,2) = 24 + 6 \cdot 12 + 6 = 102$$

числа. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.8.7. Скільки різних "слів" можна отримати, переставляючи букви в слові "паралелепіпед" ?

Задача 2.8.8. Скількома способами можна розставити білі фігури (двох тур, двох коней, двох слонів, короля і королеву) на першій лінії шахівниці, якщо не дотримуватись шахового принципу ?

Задача 2.8.9. Скільки різних "слів", у яких три букви "о" не стоять одночасно поряд, можна отримати, переставляючи букви в слові "болото" ?

Задача 2.8.10. Скільки різних "слів", що містять фрагмент "три", можна отримати, переставляючи букви в слові "трикутник" ? У скількох із них букви "у" та "и" не стоятимуть поряд ?

Задача 2.8.11. Скількома способами троє картярів можуть розділити між собою неповну колоду (36 карт)? А розділити порівну? А розділити так, щоб перший отримав 10 карт, другий – 12, третій – 14 ?

Задача 2.8.12. Скільки різних "слів", у яких друга, п'ята і восьма букви – голосні, можна отримати, переставляючи букви в слові "арккосинус" ?

Задача 2.8.13. Є 5 однакових смарагдів, 6 однакових рубінів і 7 однакових сапфірів. Скільки різних браслетів, що містять усі 18 каменів, можна виготовити ?

Задача 2.8.14. Скількома способами можна одягнути 5 різних обручок на пальці правої руки, за винятком великого пальця ?

2.9. Формула бінома Ньютона

Для будь-яких $n \in N$ *і* $a, b \in R$ *має місце рівність:*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$\left((a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \right). \qquad \textbf{(2.9.1)}$$

Рівність (2.9.1) називається ***формулою бінома Ньютона***. Ліва частина цієї рівності – біном (двочлен), права частина – розклад бінома (біноміальний розклад), C_n^k – коефіцієнти розкладу (біноміальні коефіцієнти).

Властивості розкладу бінома $(a+b)^n$ та його біноміальних коефіцієнтів.

1. Кількість доданків у розкладі дорівнює $n+1$.
2. У кожному доданку сума степенів при a та b дорівнює n.
3. $(k+1)$-й член розкладу ($k=\overline{0,n}$) має вигляд:
$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k .$$
4. Коефіцієнти розкладу, рівновіддалені від його кінців, рівні між собою:
$$C_n^k = C_n^{n-k}, \ k=\overline{0,n} .$$
5. Якщо n – парне, то середній член розкладу має найбільший біноміальний коефіцієнт. Якщо n – непарне, то є два "середні" члени розкладу з одним і тим самим найбільшим біноміальним коефіцієнтом.
6. Сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n:
$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \right). \qquad \textbf{(2.9.2)}$$

Рівність (2.9.2) отримується із формули (2.9.1) при $a=b=1$.

Оскільки C_n^k – кількість всеможливих k-елементних підмножин n-елементної множини, формула (2.9.2) має також наступне комбінаторне тлумачення.

Нехай A – множина потужності n. Тоді кількість її всеможливих підмножин, включаючи порожню множину і саму множину A, дорівнює 2^n.

Задача 2.9.1. Довести рівність:
$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0 \qquad \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0 \right).$$

Розв’язання. Поклавши у формулі (2.9.1) $a=1$, $b=-1$, очевидно, отримаємо потрібну рівність.

Зауважимо, що отриману рівність можна записати у вигляді:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots ,$$

звідки отримуємо, що сума біноміальних коефіцієнтів C_n^k з парними k дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів C_n^k з непарними k. Враховуючи властивість 6, кожна з цих сум дорівнюватиме $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$. ■

Задача 2.9.2. Довести рівність:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3n-2k} C_n^k = 10^n .$$

Розв'язання.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3n-2k} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} 2^{3n-3k+k} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} 2^{3(n-k)} 2^k C_n^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(2^3\right)^{n-k} 2^k C_n^k \overset{(2.9.1)}{=\!=\!=} (2^3 + 2)^n = 10^n ,$$

що і треба було довести. Таким чином, шукана рівність отримується шляхом безпосередньої підстановки у формулу бінома значень $a = 2^3$, $b = 2$. ■

Задача 2.9.3. Довести рівність:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1} \right). \qquad \textbf{(2.9.3)}$$

Розв'язання. Введемо у формулу бінома змінну, поклавши $b = x$:

$$(a + x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 \ldots + C_n^n x^n$$

$$\left((a + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k \right). \qquad \textbf{(2.9.4)}$$

Диференціюючи обидві частини цієї рівності по x, маємо:

$$n(a + x)^{n-1} = C_n^1 a^{n-1} + 2C_n^2 a^{n-2} x + \ldots + nC_n^n x^{n-1}$$

$$\left(n(a + x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k a^{n-k} x^{k-1} \right).$$

Покладаючи у цій рівності $a = 1$, $x = 1$, очевидно, отримаємо рівність (2.9.3). ■

Задача 2.9.4. Довести рівність:

$$C_n^0 + 3C_n^1 + 5C_n^2 + 7C_n^3 + \ldots + (2n+1)C_n^n = (n+1)2^n$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} (2k+1)C_n^k = (n+1)2^n \right). \qquad \textbf{(2.9.5)}$$

Розв'язання.

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)C_n^k = \sum_{k=0}^{n}(2kC_n^k + C_n^k) = \sum_{k=0}^{n}2kC_n^k + \sum_{k=0}^{n}C_n^k =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n}kC_n^k + \sum_{k=0}^{n}C_n^k = 2\sum_{k=1}^{n}kC_n^k + \sum_{k=0}^{n}C_n^k \overset{(2.9.3),\ (2.9.2)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$= 2\cdot n2^{n-1} + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^n,$$

що і треба було довести. Таким чином, рівність (2.9.5) отримується лінійною комбінацією рівностей (2.9.2) і (2.9.3) . ■

Задача 2.9.5. Довести рівність:

$$C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1) \right). \qquad \textbf{(2.9.6)}$$

Розв'язання. Візьмемо рівність (2.9.4), яка отримується введенням змінної у формулу бінома, і проінтегруємо її по x в межах від c до d :

$$\int_c^d (a+x)^n\,dx = \int_c^d \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k\,dx, \quad \int_c^d (a+x)^n\,dx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \int_c^d x^k\,dx,$$

$$\frac{1}{n+1}(a+x)^{n+1}\Big|_c^d = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \left(\frac{1}{k+1}x^{k+1}\Big|_c^d \right),$$

$$\frac{1}{n+1}\left((a+d)^{n+1} - (a+c)^{n+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} \frac{1}{k+1}\left(d^{k+1} - c^{k+1}\right).$$

Покладаючи в отриманій рівності $a=1$, $c=0$, $d=1$, отримуємо рівність (2.9.6). Таким чином, шукана рівність отримується шляхом інтегрування по x в межах від 0 до 1 рівності (2.9.4) з подальшою підстановкою $a=1$. ■

Задача 2.9.6. Знайти середній член розкладу бінома $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$.

Розв'язання. За умовою, $a = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, $b = -\frac{1}{\sqrt{x}} = -x^{-\frac{1}{2}}$, $n = 12$.

Тоді розклад міститиме $n + 1 = 13$ доданків і середнім членом буде сьомий, який дорівнює:

$$T_7 = T_{6+1} = C_{12}^6 \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{12-6} \left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^6 = C_{12}^6 x^2 x^{-3} = C_{12}^6 x^{-1} = \frac{924}{x}. \ \blacksquare$$

Задача 2.9.7. Знайти член розкладу бінома $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, який містить x^5, якщо сума всіх біноміальних коефіцієнтів цього розкладу дорівнює 128.

Розв'язання. За умовою, $a = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$ і $2^n = 128$, звідки $n = 7$. Тоді загальний член розкладу матиме вигляд:

$$T_{k+1} = C_7^k \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{7-k} \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^k = C_7^k x^{\frac{3(7-k)}{2} - \frac{k}{3}} \qquad (k = \overline{0,7}).$$

Розв'язуючи рівняння $\frac{3(7-k)}{2} - \frac{k}{3} = 5$, знаходимо, що $k = 3$. Отже, шуканим членом є четвертий, і він має вигляд:

$$T_4 = C_7^3 x^5 = 35x^5. \ \blacksquare$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.9.8. Довести рівності:

1) $\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k = 3^n$; 2) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k 10^k C_{2n}^k = 81^n$;

3) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}kC_n^k=0$; 4) $\sum_{k=2}^{n}k(k-1)C_n^k=n(n-1)2^{n-2}$;

5) $\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k=n(n+1)2^{n-2}$; 6) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}$.

Задача 2.9.9. Сума біноміальних коефіцієнтів розкладу бінома $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ дорівнює 1024. Знайти член розкладу, що містить x^{11}.

Задача 2.9.10. Знайти значення x в розкладі бінома $(1+x^2)^{12}$, якщо різниця між третім та другим членами розкладу дорівнює 54.

Задача 2.9.11. Знайти значення x в розкладі бінома $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{x^2}}+x^{\lg\sqrt{x}}\right)^9$, якщо третій член розкладу дорівнює 36000.

ТЕМА 3. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

3.1. Алгебра висловлювань

Висловлюванням *називається будь-яке твердження, про яке з достовірністю можна сказати, є воно істинним чи хибним.* Наприклад, твердження "0>3" і "паралелограм має 4 сторони" є висловлюваннями (перше – хибне, друге – істинне), а твердження "завтра буде дощ" не є висловлюванням.

В математичній логіці не цікавляться конкретним змістом висловлювань, а вивчають, є вони істинними чи хибними. Якщо висловлювання істинне, йому кладуть у відповідність 1, якщо хибне – 0.

Позначатимемо надалі висловлювання малими латинськими літерами $p, q, r, s, t, \ldots$.

До висловлювань можна застосовувати спеціальні операції заперечення (позначається символом $\neg$ або $\overline{}$), диз`юнкції ($\vee$), кон`юнкції ($\wedge$), імплікації ($\rightarrow$) та еквіваленції (~).

Запереченням *висловлювання* p *називається висловлювання* $\overline{p}$*, яке істинне, коли* p *– хибне, і хибне, коли* p *– істинне.*

Кон'юнкцією *висловлювань* p *і* q *називається висловлювання* $p \wedge q$*, що є істинним лише тоді, коли обидва висловлювання* p *і* q *є істинними.*

Диз'юнкцією *висловлювань* p *і* q *називається висловлювання* $p \vee q$*, що є істинним, коли істинним є хоча б одне із висловлювань* p *і* q*.*

Імплікацією *висловлювань* p *і* q *називається висловлювання* $p \rightarrow q$*, що є хибним лише тоді, коли* p *– істинне, а* q *– хибне.*

Еквіваленцією *висловлювань* p *і* q *називається висловлювання* $p \sim q$*, що є істинним, коли істиннісні значення висловлювань* p *і* q *однакові.*

Таблиці істинності цих операцій мають вигляд:

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \sim q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Запереченню відповідає логічна зв'язка "***не***", кон`юнкції – "***і***", диз'юнкції – "***або***", імплікації – "***якщо …, то***", еквіваленції – "***тоді і тільки тоді, коли***".

Легко помітити, що

$$p \wedge q = \min\{p, q\}, \quad p \vee q = \max\{p, q\}.$$

Використовуючи введені операції, на основі простих (елементарних) висловлювань $p, q, r, s, t, \ldots$ можна будувати більш складні, наприклад, $(\overline{p} \vee q) \sim (r \rightarrow (s \wedge t))$.

Мають місце наступні властивості операцій над висловлюваннями – так звані ***закони алгебри логіки*** (0 і 1 в них позначають відповідно хибне та істинне висловлювання):

1.1. $p \vee q = q \vee p$

1.2. $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

1.3. $p \vee (q \wedge r) =$

$$= (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

1.4. $p \vee p = p$

1.5. $p \vee 0 = p$

1.6. $p \vee 1 = 1$

1.7. $p \vee \overline{p} = 1$

1.8. $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

1.9. $p \vee (p \wedge q) = p$

2.1. $p \wedge q = q \wedge p$

2.2. $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$

2.3. $p \wedge (q \vee r) =$

$$= (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

2.4. $p \wedge p = p$

2.5. $p \wedge 0 = 0$

2.6. $p \wedge 1 = p$

2.7. $p \wedge \overline{p} = 0$

2.8. $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$

2.9. $p \wedge (p \vee q) = p$

3.1. $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$, $\overline{\overline{p}} = p$

3.2. $p \to q = \overline{p} \vee q$

3.3. $p \sim q = (p \to q) \wedge (q \to p)$

Закони алгебри логіки перевіряються за допомогою таблиць істинності і надалі використовуються для еквівалентного перетворення формул з метою їх спрощення.

Тавтологія *– складне висловлювання, що є істинним при будь-яких істиннісних значеннях елементарних висловлювань, з яких воно складається.*

Задача 3.1.1. Довести рівність

$$p \to q = \overline{q} \to \overline{p}.$$

Розв'язання.

Перший спосіб – порівняння таблиць істинності:

p	q	$p \to q$	$\overline{q}$	$\overline{p}$	$\overline{q} \to \overline{p}$
0	0	**1**	1	1	**1**
0	1	**1**	0	1	**1**
1	0	**0**	1	0	**0**
1	1	**1**	0	0	**1**

Другий спосіб – еквівалентні перетворення з використанням законів алгебри логіки:

$$\underline{\overline{q} \to \overline{p}} \overset{3.2}{=} \overline{\overline{q}} \vee \overline{p} \overset{3.1}{=} q \vee \overline{p} \overset{1.1}{=} \overline{p} \vee q \overset{3.2}{=} \underline{p \to q}. \blacksquare$$

Задача 3.1.2. Довести, що висловлювання $(p \wedge q) \to (r \vee p)$ є тавтологією.

Розв'язання. Як і у попередній задачі, доведення здійснимо двома способами:

p	q	r	$p \wedge q$	$r \vee p$	$(p \wedge q) \to (r \vee p)$
0	0	0	0	0	**1**
0	0	1	0	1	**1**
0	1	0	0	0	**1**
0	1	1	0	1	**1**
1	0	0	0	1	**1**
1	0	1	0	1	**1**
1	1	0	1	1	**1**
1	1	1	1	1	**1**

$$\underline{(p \wedge q) \to (r \vee p)} \overset{3.2}{=} \overline{(p \wedge q)} \vee (r \vee p) \overset{2.8}{=}$$

$$= (\overline{p} \vee \overline{q}) \vee (r \vee p) \overset{1.1}{=} (\overline{q} \vee \overline{p}) \vee (p \vee r) \overset{1.2}{=}$$

$$= ((\overline{q} \vee \overline{p}) \vee p) \vee r \overset{1.2}{=} (\overline{q} \vee (\overline{p} \vee p)) \vee r \overset{1.1}{=}$$

$$= (\overline{q} \vee (p \vee \overline{p})) \vee r \overset{1.7}{=} (\overline{q} \vee 1) \vee r \overset{1.6}{=} 1 \vee r \overset{1.1,\,1.6}{=} \underline{1}. \ \blacksquare$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 3.1.3. Відомо, що $p \sim q = 0$. Знайти істиннісні значення висловлювань $p \sim \overline{q}$ і $\overline{p} \sim q$.

Задача 3.1.4. Відомо, що $q \to r = 1$. З'ясувати, чи досить цього, щоб встановити істиннісне значення висловлювання:

1) $p \wedge (q \to r)$; 2) $p \vee (q \to r)$.

Задача 3.1.5. Відомо, що $p = 1$, $p \to q = 1$, $\overline{r} \to \overline{q} = 1$. Знайти істиннісне значення висловлювання r.

Задача 3.1.6. Відомо, що $p \to q = 1$. Що можна сказати про істиннісне значення висловлювання $(\overline{p} \wedge q) \sim (p \vee q)$?

Задача 3.1.7. За допомогою таблиць істинності і методом еквівалентних перетворень довести, що формули

1) $p \to (q \vee p)$;　　2) $(p \wedge q) \to p$;

3) $p \to (q \to p)$;　　4) $p \to (q \to (p \wedge q))$;

5) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$;

6) $(q \to p) \to ((q \to r) \to (q \to (p \wedge r)))$;

7) $(q \to r) \to ((p \to r) \to ((q \vee p) \to r)))$

є тавтологіями.

3.2. Логіка предикатів

n-місним предикатом від змінних *$x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається функція $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, областю визначення якої є деяка множина $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, а областю значень – множина $E_2 = \{0,1\}$.*

Область визначення предиката називають його предметною областю.

Приклади предикатів: $p(x) =$ "x – просте число", $x \in N$; $q(x, y) =$ "$x + y = 5$", $(x, y) \in R \times R$.

Предикат не є висловлюванням, він перетворюється у висловлювання лише тоді, колі всі його аргументи набувають конкретних значень.

Позначивши $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $M = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, будь-який n-місний предикат $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ з предметною областю $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ можна формально розглядати як одномісний предикат $p(x)$ з предметною областю M.

Оскільки при конкретних значеннях змінних будь-який предикат стає висловлюванням, то на предикати природним чином поширюють операції заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації та еквіваленції. Розглянемо, наприклад, предикати $p(x) =$ "x – просте число", $q(x) =$ "$x > 3$". Тоді $\overline{p}(x) =$ "x – число, що не є простим", $\overline{q}(x) =$ "$x \le 3$", $r(x) = p(x) \wedge q(x) =$ "x – просте число, що більше 3".

Нехай $p(x)$ – одномісний предикат з предметною областю M. Висловлювання ***"для всіх x із M $p(x)$ істинне"*** і ***"існує таке x із M, для якого $p(x)$ істинне"*** позначають відповідно $\forall x\, p(x)$ і

$\exists x\, p(x)$. (Множина M не входить у позначення і повинна бути зрозумілою із контексту). Символи $\forall$ і $\exists$ називаються відповідно ***квантором загальності*** і ***квантором існування***. Перехід від предиката $p(x)$ до виразу $\forall x\, p(x)$ або $\exists x\, p(x)$ називається **навішуванням квантора на змінну** x (або на предикат $p(x)$).

У випадку багатомісного предиката $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ квантори можна навішувати в будь-якому порядку як на всі, так і на частину змінних (при цьому на кожну змінну повинно бути навішано не більше одного квантора). Змінна, на яку навішаний квантор, називається ***зв'язаною***, а незв'язана змінна називається ***вільною***. Вільна змінна – це звичайна змінна, яка може набувати довільних допустимих значень із предметної області. Якщо квантори навішані на всі змінні предиката, він стає висловлюванням, інакше – перетворюється у предикат меншої розмірності. Розглянемо, наприклад, деякий тримісний предикат $p(x_1, x_2, x_3)$, тоді $\exists x_2 \forall x_1 \exists x_3\, p(x_1, x_2, x_3)$ – висловлювання, а $\forall x_3 \exists x_1\, p(x_1, x_2, x_3)$ – одномісний предикат від вільної змінної x_2.

Мають місце наступні закони логіки предикатів:

1. $\overline{\forall x\ p(x)} \sim \exists x\ \overline{p}(x)$, $\overline{\exists x\ p(x)} \sim \forall x\ \overline{p}(x)$ **(закони де Моргана)**
2. $\forall x\ (p(x) \wedge q(x)) \sim \forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x)$
3. $\exists x\ (p(x) \vee q(x)) \sim \exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$
4. $\exists x\ (p(x) \wedge q(x)) \to \exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)$
5. $\forall x\ (p(x) \vee q(x)) \leftarrow \forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)$
6. Однакові квантори можна переставляти, тобто тавтологіями будуть, наприклад, формули $\forall x\, \forall y\ p(x, y) \sim \forall y\, \forall x\ p(x, y)$ і $\exists x\, \exists y\ p(x, y) \sim \exists y\, \exists x\ p(x, y)$.
7. Різні квантори, взагалі кажучи, переставляти не можна (наприклад, якщо $p(x, y) =$ "x ділиться націло на y", де $(x, y) \in N \times N$, то, $\exists x_1\ \forall x_2\ D(x_1, x_2) \neq \forall x_2\ \exists x_1\ D(x_1, x_2)$).

За допомогою предикатів, операцій квантування та законів логіки предикатів може бути формалізована мова математичних означень, тверджень та доведень.

Задача 3.2.1. Ввівши предикати, формалізувати велику теорему Ферма: "Для будь-якого цілого $n > 2$ не існує натуральних чисел

x, y, z, що задовольняють рівняння $x^n + y^n = z^n$".

Розв'язання. Введемо предикати: $p(x) =$ "x – натуральне число", $x \in N$; $q(n) =$ "$n > 2$", $n \in N$; $r(x, y, z, n) =$ "$x^n + y^n = z^n$", $(x, y, z, n) \in N \times N \times N \times N$. Тоді теорема Ферма має вигляд:

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, \forall n\ [(p(x) \wedge p(y) \wedge p(z) \wedge q(n)) \rightarrow \bar{r}(x, y, z, n)]. \ \blacksquare$$

Задача 3.2.2. Ввівши предикати, формалізувати:

1) означення обмеженої та необмеженої функцій;

2) означення парної функції і функції, що не є парною.

Розв'язання. 1) Як відомо, *функція* $f(x)$ *називається* ***обмеженою****, якщо існує стала* $C > 0$ *така, що* $|f(x)| \le C$ *для будь-якого* $x \in D_f$. Введемо двомісний предикат $p(x, C) =$ $=$ "$|f(x)| \le C$", $(x, C) \in D_f \times R^+$. Тоді формалізоване означення обмеженої функції має вигляд: $\exists C\, \forall x\ p(x, C)$. Заперечуючи це означення і скориставшись законами де Моргана, отримуємо формалізоване означення необмеженої функції:

$$\overline{\exists C\, \forall x\ p(x, C)} = \forall C\ \overline{\forall x\ p(x, C)} = \forall C\, \exists x\ \bar{p}(x, C),$$

де $\bar{p}(x, C) =$ "$|f(x)| > C$".

Таким чином, *функція* $f(x)$ *називається* ***необмеженою****, якщо для будь-якої сталої* $C > 0$ *існує* $x \in D_f$ *таке, що* $|f(x)| > C$. $\blacksquare$

2) Як відомо, *функція* $f(x)$ *називається* ***парною****, якщо для будь-якого* $x \in D_f$*:* $-x \in D_f$ *і* $f(-x) = f(x)$. Введемо одномісні предикати $p(x) =$ "$-x \in D_f$", $q(x) =$ "$f(-x) = f(x)$", де $x \in D_f$. Тоді означення парної функції має вигляд: $\forall x\, (p(x) \wedge q(x))$. Заперечуючи його, отримуємо означення функції, що не є парною:

$$\overline{\forall x\, (p(x) \wedge q(x))} = \exists x\, (\overline{p(x) \wedge q(x)}) = \exists x\, (\bar{p}(x) \vee \bar{q}(x)),$$

де $\bar{p}(x) =$ "$-x \notin D_f$", $\bar{q}(x) =$ "$f(-x) \ne f(x)$".

Таким чином, *функція* $f(x)$ ***не є парною****, якщо існує* $x \in D_f$ *таке, що* $-x \notin D_f$ *або* $f(-x) \ne f(x)$. $\blacksquare$

Задачі для самостійної роботи

Задача 3.2.3. Ввести одномісні предикати на відповідних областях і записати з їх допомогою наступні висловлювання:

1) будь-яке натуральне число, що ділиться на 12, ділиться на 2 і 4;
2) жителі Швейцарії обов`язково володіють французькою, італійською або німецькою мовами;
3) на відрізку $[0,1]$ неперервна функція зберігає знак або набуває нульового значення.

Задача 3.2.4. Ввівши предикати, формалізувати означення:

1) непарної функції;
2) нескінченно малої функції;
3) границі числової послідовності;
4) границі функції в точці;
5) неперервності функції в точці.

Сформулювати означення, які є запереченнями цих означень.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1.2.9. 1) U; 2) B; 3) $B \cap C$; 4) $\varnothing$; 5) $A \cap B \cap M$; 6) B; 7) C; 8) C; 9) U; 10) $A \cup B \cup C$; 11) $A \cup B \cup C$. **1.3.3.** 862. **1.3.4.** 32. **1.3.5.** 25. **1.3.6.** 11; 1; 3; 0. **1.3.7.** 3; 15. **1.3.8.** 94; 65; 25. **1.3.9.** 4. **1.3.10.** 30; 7; 18; 5. **1.3.11.** 26. **2.1.4.** 20. **2.1.5.** Якщо спочатку було взято білу кульку. **2.1.6.** 60; 36. **2.1.7.** 26820600. **2.1.8.** 370590000. **2.1.9.** 900000000; 3265920; 896734080. **2.1.10.** 750. **2.3.3.** C_{30}^4. **2.3.4.** $C_7^1 C_9^1$; $C_7^2 C_9^2$. **2.3.5.** $C_3^1 C_5^3 = C_3^2 C_5^2 = 3 \cdot 10 = 30$, оскільки при формуванні однієї команди інша утворюється автоматично. **2.3.6.** 1) $C_4^1 C_{48}^9$; 2) $C_{52}^{10} - C_{48}^{10} = C_4^1 C_{48}^9 + C_4^2 C_{48}^8 + C_4^3 C_{48}^7 + C_4^4 C_{48}^6$; 3) $C_4^2 C_{48}^8$; 4)

$(C_{52}^{10} - C_{48}^{10}) - C_4^1 C_{48}^9 = C_4^2 C_{48}^8 + C_4^3 C_{48}^7 + C_4^4 C_{48}^6$. **2.3.7.** $C_{28}^7 C_{21}^7 C_{14}^7 C_7^7 = (28!)/(7!)^4$. **2.3.8.** $C_{17}^{12} - C_{15}^{10} = 3185$. **2.3.9.** $C_4^2 C_7^4 + C_4^3 C_7^3 + C_4^4 C_7^2 = 371$. **2.3.10.** $4C_{33}^2$. **2.3.11.** $C_{15}^1 + C_{15}^2 + ... + C_{15}^{15} = 32767$. **2.3.12.** $\sum_{k=0}^{5} C_5^k = 32$**,** оскільки $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ і добуток будь-якої кількості простих множників буде дільником. **2.3.13.** $\sum_{k=0}^{4} C_4^k = 16$**.** **2.3.14.** $C_n^2 - n = n(n-3)/2$, оскільки будь-які дві вершини визначають сторону або діагональ. **2.4.3.** $R_{30}^4 = 657720$. **2.4.4.** $R_{300}^1 + R_{300}^2 + R_{300}^3 = 26820600.$ **2.4.5.** $R_5^3 = 60$; $R_5^3 - R_4^3 = 60 - 24 = 36$. **2.4.6.** $R_4^3 R_5^3 R_6^3 = 172800$. **2.4.7.** $R_{33}^1 R_{10}^4 + R_{33}^2 R_{10}^4 + R_{33}^3 R_{10}^4$. **2.4.8.** 1) R_7^6; 2) $R_8^6 - R_7^5$. **2.5.6.** C_{64}^8; $P_8 = 40320$. **2.5.7.** $P_5 P_3 = 720$; $P_4 P_4 = 576$. **2.5.8.** 1) $P_n - 2P_{n-1}$; 2) $P_n - P_3 P_{n-2}$. **2.5.9.** $P_7 - P_5 P_3 = 4320$. **2.5.10.** $C_6^3 P_6 = 14400$. **2.5.11.** $C_7^4 P_7 - C_6^3 P_6 = 162000$. **2.5.12.** $C_3^1 P_5 P_5 = 43200$. **2.5.13.** $C_{12}^4 C_{15}^4 P_4$. **2.5.14.** $2P_5 P_5 = 28800$; $2P_5 P_5 / 10 = 2880$. **2.5.15.** $P_7 / (7 \cdot 2) = 360$, оскільки намисто не змінюється при циклічному зсуві намистин, а також при перевертанні. **2.6.4.** 1) $\overline{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12} = 293930$; 2) $\overline{C}_{10}^{8} = C_{17}^8 = 24310$; 3) $C_{10}^8 = 45$. **2.6.5.** $\overline{C}_5^{30} = C_{34}^{30} = 46376$. **2.6.6.** $\overline{C}_7^{2} = 28$. **2.6.7.** $\overline{C}_2^{10} \overline{C}_2^{15} \overline{C}_2^{14} = 2640$. **2.6.8.** $\overline{C}_4^{4} = 35$. **2.6.9.** $\overline{C}_n^{k-n} = C_{k-1}^{k-n}$. **2.6.10.** $\overline{C}_7^{100}$; $\overline{C}_7^{93}$. **2.7.5.** $\overline{R}_2^n = 2^n$. **2.7.6.** $\overline{R}_3^m = 3^m$. **2.7.7.** $\overline{R}_{13}^4 = 28561$; $R_{13}^4 = 17160$. **2.7.8.** $\overline{R}_{10}^3 - R_{10}^3 = 280$. **2.7.9.** $\overline{R}_2^5 = 32$; $\sum_{k=1}^{5} \overline{R}_2^k = 62$. **2.7.10.** $\sum_{k=1}^{6} \overline{R}_3^k = 1092$. **2.7.11.** $\overline{R}_4^6 = 4096$. **2.8.7.** $P_{13}(3,3,2,2,1,1,1) = 43243200$. **2.8.8.** $P_8(2,2,2,1,1) = 5040$. **2.8.9.** $P_6(3,1,1,1) - P_4 = 96$. **2.8.10.** $P_7(2,1,1,1,1,1) = 2520$; $P_7(2,1,1,1,1,1) - P_2 P_6(2,1,1,1,1) = 1800$. **2.8.11.** $\overline{R}_3^{36}$; $P_{36}(12,12,12)$;

$P_{36}(10,12,14)$. **2.8.12.** $R_4^3 P_7(2,2,1,1,1)$. **2.8.13.** $P_{18}(5,6,7)/(18 \cdot 2)$, оскільки намисто не змінюється при циклічному зсуві намистин, а також при перевертанні. **2.8.14.** $P_8(3,1,1,1,1,1) = 6720$. **2.9.9.** $T_4 = 120x^{11}$. **2.9.10.** $x = \pm 1$. **2.9.11.** $x = 1000$ або $x = 0{,}1$. **3.1.3.** 1 і 1. **3.1.4.** 1) Ні; 2) так. **3.1.5.** $r = 1$. **3.1.6.** Протилежне до істиннісного значення висловлювання p.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. Підручник. – Львів: "Магнолія Плюс", 2005. – 608 с.
2. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика. Підручник. – К.: Вища шк., 2002. – 288 с.
3. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.
4. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. – М.: ФИМА, МЦНМО, 2006. – 400 с.
5. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения / Под. ред. Рыбникова К.А. – М.: Наука, 1982. – 368 с.
6. Кужель О.В. Елементи теорії множин і математичної логіки. – К.: Радянська школа, 1977. – 160 с.
7. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – М.: Наука, 1984. – 224 с.

ЗМІСТ