**Новосельська Ніна**

Науковий керівник – проф. Бігун Я.Й.

**Узагальнення математичної моделі імунної**

**відповіді організму людини**

Для дослідження основних кількісних закономірностей пере-бігу інфекційних процесів Г.І. Марчук в 1975 році запропо-нував базову математичну модель інфекційного захворювання [1]. основною задачею цієї моделі був перехід до опису хвороби як фізіологічного процесу взаємодії клітин і молекул імунної системи, органа-мішені і патогена.

У монографії Г.І. Марчука розглянута математична модель імунної відповіді організму людини вигляду

$\dot{V}=\left(β-γF\right)V,$ (1)

$\dot{C} = ξ\left(m\right)αF\_{τ}V\_{τ}-μ\_{c}\left(C-C^{\*}\right), $ (2)

$\dot{F} = ρC-ηγVF-μ\_{f}F,$ (3)

$\dot{m}= σV-μ\_{m}m,$ (4)

де *V, C* i *F* – концентрація антигенів, плазмоклітин і антитіл відповідно, *m* – відносна характеристика ураження органу-мішені, 0 ≤$ m\left(t\right)$ ≤ 1.

Коефіцієнти моделі – невід’ємні числа, запізнення 0$<τ$ – час формування каскаду плазмоклітин, $F\_{τ}\left(t\right)=F\left(t-τ\right), V\_{τ}\left(t\right)=V\left(t-τ\right),$  – постійний рівень плазмоклітин в організмі.

Узагальнення моделі на випадок змінних коефіцієнтів та змінного запізнення здійснено в працях [2,3].

Розглянемо замість рівняння (1) наступне рівняння

$\dot{V}=\left(β-δ\left(\frac{V}{k}\right)^{n}\right)V-γFV,$ (5)

де $δ\geq 0, n\in N∪\left\{0\right\}$. Рівняння (5) визначає узагальнену логістичну зміну концентрації антигену. При $n\geq 1$ така ситуація може виникнути під впливом ліків, які депресивним чином впливають на динаміку антигену.

Система (2) - (4), (5) завжди має локально асимптотично стійкий розв’язок

$$V\_{1}=m\_{1}=0, C\_{1}=C^{\*}, F\_{1}=F^{\*}=\frac{ρC^{\*}}{μ\_{f}} ,$$

який відповідає стану здорового організму.

Хронічній формі захворювання відповідають розв’язки

$F\_{2}=\frac{β}{γ}\left(1-δ\left(\frac{V\_{2}}{K}\right)^{n}\right), m\_{2}= \frac{σV\_{2}}{μ\_{m}}$ ,

де  i  задовольняють систему лінійних рівнянь

$$μ\_{с}С\_{2}- \frac{αβ}{γ}\left(1-δ\left(\frac{V\_{2}}{K}\right)^{n}\right)V=μ\_{с}C^{\*},$$

$$ργC\_{2}-β\left(1-δ\left(\frac{V\_{2}}{K}\right)^{n}\right)\left(ηγV\_{2}+μ\_{f}\right)=0.$$

Якщо *n*=1, то *V* є розв’язком рівняння

$$aδV^{2}-\left(a+bδ\right)V+C=0$$

де $a=β\left(αρ- ηγμ\_{c}\right), b=βμ\_{c}μ\_{f}, c=μ\_{c}μ\_{f}\left(β-γF^{\*}\right).$

Проаналізовано існування стаціонарних розв’язків. Зокрема, якщо $a>0 i c>0, $то існує два таких розв’язки, якщо $c<0, $то тільки один. Якщо $a<0 i c<0, $що відповідає стану хронічного захворювання з імунодефіцитом [1], то може існувати тільки один стаціонарний роз’язок.

Здійснено числове моделювання імунної відповіді в системі Mathematica.

**Список літератури**

1. Марчук Г.И Математические модели в иммунологии: вычислительные методы и эксперименты / Г.И. Марчук. –М.: Наука, 1991. – 276 с.
2. Foryś U. Hopf bifurcation in Marchuk’s model of immune reactions / U. Foryś // Math. Comput. Modelling. – 2001, 34. – P. 725–735.
3. Foryś U. Marchuk’s model of immune system dynamics with application to tumour growth / U. Foryś // J. Theor. Med. – 2001, 34. – P. 85–93.