Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Кафедра прикладної математики
та інформаційних технологій

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ ТА ІТ-ТЕХНОЛОГІЇ

Матеріали міжвузівського наукового семінару,
присвяченого 100-річчю від дня народження
професора Василя Павловича Рубаника (1917–1993)
і 55-річчю кафедри прикладної математики
та інформаційних технологій

9 – 10 червня 2017 року

Чернівці – 2017

ЗМІСТ

Спогади викладачів кафедри та факультету

КАФЕДРІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ЧЕРНІВЕЦЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ – 55 РОКІВ

Ярослав Бігун

Вступне слово

9 червня 2017 р. виповнилось 55 років від часу заснування на фізико-математичному факультеті Чернівецького державного університету (ЧДУ) **кафедри прикладної мате-матики та механіки** (ПММ). 10 червня 2004 р. кафедра ПММ отримала назву **прикладної математики**, а з 1 вересня 2014 р. – **прикладної математики та інформаційних технологій** (ПМІТ).

За час своєї діяльності кафедрою підготовлено біля 1400 фахівців, з них 157 магістрів прикладної математики. Серед випускників кафедри 13 докторів наук, більш як 60 кандидатів наук і перший з випускників математичного факультету член-кореспондент НАН України, **Василь Юхимович Слюсарчук**, є випускником нашої кафедри 1970 р. І перша жінка на факультеті, доктор фізико-математичних наук, **Олена Олексіївна Карлова**, також випускниця 2002 р. нашої кафедри.

Кафедра веде підготовку бакалаврів і магістрів зі спеціальності 113 – прикладна математика, галузь знань 11 – математика і статистика. Кафедра забезпечена професійно підготовленими викладачами, співпрацює з провідними спеціалістами Інституту математики та Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київського, Львівського, Харківського національних університетів, Національного університету «Львівська політехніка" та інших вузів України. Кафедра налагодила співробітництво з Інститутом прикладної математики та механіки Варшавського університету, фахівцями з інформаційних технологій і комп'ютерного моделювання з Канади, Польщі, Румунії, Молдови.

Активно співпрацює кафедра з комп'ютерними компаніями SharpMinds, MobiDev, Svitla System, SoftServe, ТзОВ "Юкон Софтваре шведсько-українським медичним центром Angelholm та іншими установами, на яких працюють чимало випускників і студентів кафедри. Про це свідчить низка семінарів і циклів практичних занять, проведених співробітниками компаній за участю кафедри, а також участь провідних фахівців цих компаній у роботі семінару.

У навчальному процесі кафедра забезпечує дисципліни з циклу природничо-наукової, професійної та практичної підготовки, частину з яких слухають і студенти інших спеціальностей. Зокрема, кафедра забезпечує такі дисципліни: об'єктно-орієнтоване програмування, алгоритми і структури даних, архітектура комп'ютерів, операційні системи, розробка мобільних додатків для ОС Android, системне програмування, проектування програмних систем, обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка, дискретна математика, математична логіка та теорія алгоритмів, числові методи, конфліктно-керовані процеси та нелінійні моделі, комп'ютерна математика, теорія інформації та кодування, основи інтернет-технологій, розробка UI/UX дизайну, серверна мова PHP, Frontend-розробка Web-додатків, технології програмування мовою Python, комп'ютерне моделювання еколого-економічних систем, теорія імпульсних систем, основи математичного моделювання та системного аналізу, платформи корпоративних інформаційних систем.

У 2016–2020 рр. кафедра виконує науково-дослідну роботу "Конструктивні та якісні методи дослідження диференціально-функціональних рівнянь і математичне моделювання економічної поведінки, природничих та інформаційних процесів" (наук. кер. проф. Я.Й. Бігун) та бере участь у виконанні бюджетної НДР "Аналітичні та наближені методи дослідження нових класів еволюційних неперервних і дискретних систем" (наук. кер. проф. Р.І. Петришин).

Кафедра провела в ЧНУ у 2003 р. міжнародну конференцію "Шості Боголюбовські читання", в 2012 р. Всеукраїнську конференцію "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці" до 50-й річниці з часу заснування кафедри ПММ, у 2016 р. разом з кафедрою математичного моделювання і кафедрою диференціальних рівнянь провела міжнародну конференцію "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", присвячену 80-річчю від дня народження професора В.І. Фодчука.

Відкриття кафедри

Кафедра прикладної математики та механіки організована згідно з наказом № 404 міністра ВССО України **від 9 червня 1962 р.** До її складу увійшли викладачі-механіки з кафедри диференціальних рівнянь та група викладачів й інженерів із кафедри математичного аналізу.

Об'єктивними причинами створення кафедри, яка б вела підготовку фахівців з розробки математичного і програмного забезпечення ЕОМ, було інтенсивне впровадження ЕОМ в автоматизацію виробництва, розвиток космічних та військових програм, наукові дослідження. Відкриття кафедри стало логічним підсумком запровадження в 1959 р. на кафедрі математичного аналізу за ініціативою й активною участю проф. М.К. Фаге спеціалізації з обчислювальної математики [1]. У цьому ж році було здійснено набір 25 студентів для навчання з цієї спеціалізації, перший випуск яких відбувся в червні 1962 р.

Свій перший навчальний рік кафедра працювала у такому складі: завідувач кафедри доцент В.П. Рубаник, доцент Ю.М. Круг, ст. викладач Х.А. Цареградський, асистенти М.М. Майданюк, Л.К. Старик, З.Л. Кравченко, З.І. Вітер, Г.Т. Герасимчук, В.С. Шкільнюк, Ю.І. Марченко, Є.Ф. Царков, інженер Ю.М. Сичов, ст. мех. Р. Мамчур, лаб. Г.М. Островська, аспіранти Б.С Гайсенюк і Г.В . Ножак.

Перший завідувач кафедри ПММ

Організатором кафедри ПММ та її першим завідувачем у 1962–1972 рр. був проф. **Василь Павлович Рубаник.** У 1968–1972 рр. він працював також проректором з наукової роботи ЧДУ. Перед завідувачем кафедри постали непрості задачі з підбором викладачів та забезпеченням їх навантаженням, придбанням обчислювальної техніки. Працівники кафедри ПММ 60-х років відзначають велику працездатність завідувача, його толерантність, вміння організувати роботу.

Професор В.П. Рубаник започаткував наукову тематику, яка на той час була досить популярною в Україні й світі, мала прикладне значення, не залишається поза увагою і в наш час. Він та його учні досліджували квазілінійні коливні системи із запізненням під дією детермінованих та випадкових збурень, для таких систем розвивався метод усереднення й асимптотичний метод Крилова-Боголюбова. Досліджувалась взаємодія й синхронізація в нелінійних коливних системах із запізненням, коливні процеси з розподіленими параметрами та інші питання. Спільно із Є.Ф. Царковим, тепер габілітованим професорм Ризького технічного університету, В.П.Рубаник започаткував дослідження стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням.

У 1964 р. В.П. Рубаник захистив докторську дисертацію "Коливання квазілінійних систем з запізнюючими зв'язками". В 1969 р. опублікована його перша монографія [2]. В його науковому доробку ще монографія [3], посібник [4] та понад 80 праць. Він доклав значних зусиль у проведенні в Чернівецькому університеті трьох Всесоюзних міжвузівських конференцій із диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється в 1965, 1968 і 1972 рр.

З 1976 р. В.П. Рубаник працював у Гомельському університеті (Білорусь). Помер 9 квітня 1993 року й похований в м. Гомель.

Викладачі 60-х

У 1963 р. відбулись дві події: університет отримав ЕОМ І покоління Минск-14 і при кафедрі ПММ було створено обчислювальну лабораторію. З 1968 р. по січень 1972 р. завідував нею **Євгеній Федорович Царков**, талановитий математик, який підготував та допоміг завершити 5 кандидатських дисертацій. Він працював на кафедрі з вересня 1962 р. по червень 1963 р. і з вересня 1968 р. по січень 1972 р. Разом з В.П. Рубаником започаткували в Чернівецькому університеті дослідження різницевих та стохастичних диференціально-функціональних рівнянь.

До роботи на кафедрі В.П. Рубаник залучав здібних випускників. **Іван Юхимович Гатенюк** з 1 січня 1965 р. працював асистентом кафедри до переходу 25 січня 1969 р. на посаду старшого інженера обчислювальної лабораторії ЧДУ. У 1965 р. і з 1970 по 1972 р. викладачем кафедри працював **Петро Костянтинович Вигнан**. В.П. Рубаник був науковим керівником аспіранта **Георгія Васильовича Ножака**, який у 1966 р. захистив кандидатську дисертацію "Построение процессов в амплитудно-импульсных системах с распределенными параметрами", працював на кафедрі ПММ у 1964–1971 рр., доцент з 1970 р.

З часу відкриття кафедри в 1962 р. й до 2000 р. на кафедрі працював **Петро Федорович Ярема**, доцент з 1973 р. Кандидатську дисертацію "Деякі задачі синхронізації автоколивних систем із запізненням" захистив у 1970 р. (наук. кер. проф. В.П. Рубаник). Читав курси з вищої математики, теоретичної і прикладної механіки. Опублікував понад 50 наукових і методичних праць.

Десять років на кафедрі ПММ викладав **Марк Ілліч Букатар**, доцент кафеди з 1972 р. У 1969 р. захистив кандидатську дисертацію "Исследование случайных процессов в квазилинейных дифференциальных уравнениях с запаздыванием" (наук. кер. В.П. Рубаник).

З 01.09.1962 і до 30.06.1990 на кафедрі працювала **Зінаїда Леонідівна Кравченко**, доцентом кафедри обрана в 1979 р. Кандидатську дисертацію "Застосування стробоскопічного методу М. Мінорського до дослідження квазілінійних систем із запізненням" захистила в 1969 р. (наук. кер. проф. В.П. Рубаник).

З 1962 по 1972 рік на кафедрі працювали **Марія Миколаївна Ігнатенко**, яка в 1969 р. захистила кандидатську дисертацію "Дослідження випадкових процесів в лінійних системах з запізненнями", та **Юлія Іванівна Марченко**, у 1967 р. вона захистила кандидатську дисертацію "Взаємна синхронізація автоколивних систем при наявності хвильових і запізнюючих зв'язків". Їх науковим керівником також був Василь Павлович.

З 1963 р. по 1999 р. на кафедрі працював **Михайло Леонович Свердан**, старший викладач із 1970 р., у 1978 р. обраний доцентом кафедри ПММ, з 1998 р. професором. Михайло Леонович з 1992 р. проректор ЧДУ, а з 1998 р. і до 31 серпня 2004 р. – першим проректором. Його наукові дослідження стосуються стійкості динамічних систем з фелерівськими та марковськими параметрами і марківським ланцюгом у перемиканнях за часом, а також вивчення питання стійкості імпульсних систем з марковськими перемиканнями. Докторську дисертацію "Стійкість імпульсних динамічних систем з випадковими збуреннями" захистив у 1997 р. Він був науковим керівником двох кандидатських дисертацій.

На кафедрі працювали викладачі **Любов Іванівна Ясинська** (1966–1972 рр.), Любов Костянтинівна Шеляг (1966–1972 рр.), **Б.О. Коваль** (1966–1972 рр.).

Випускник кафедри ПММ 1970 р. **В.Ю. Слюсарчук**, перший з випускників факультету, обраний член-кореспондентом Національної академії наук України (6 березня 2015 р.). На другому році аспірантури в 1972 р. захистив кандидатську дисертацію "Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі", а в 1987 р. – докторську дисертацію "Обмежені розв'язки функціональних і функціонально-диференціальних рівнянь". Працював на кафедрі в 1973–1974 рр.

Школу механіки на кафедрі з 1963 по 1987 рік представляв **Павло Прохорович Вчерашнюк**. У 1963 р він захистив кандидатську дисертацію "Застосування методу канонічного усереднення в задачах динаміки штучних супутників Землі" (наук. керівники – академік Ю.О. Митропольський і проф. В.О.Гробов). Доцентом кафедри обраний у 1965 р. Читав курси з теоретичної механіки, вищої математики, спецкурс із небесної механіки. Опублікував понад 40 наукових праць, навчальний посібник [5]. Під його керівництвом виконав кандидатську дисертацію викладач кафедри ПММ Д.О.Мігуца.

Із січня 1967 р. по вересень 1985 р. на кафедрі працював **Антон Михайлович Садовяк**, випускник кафедри 1965 р. Обраний доцентом 30 жовтня 1978 р. Кандидатську дисертацію "Системи лінійних стохастичних диференціальних рівнянь" захистив 25 грудня

1975 р. (наук. кер. проф. В.П. Рубаник і доц. Є.Ф. Царков).

40 років, з 01.09.1967 по 31.08.2010 р., на кафедрі працювала **Ніна Володимирівна Котенко**, яка закінчила кафедру ПММ у 1967 р., доцент кафедри з 1994 р. Її наукові дослідження пов'язані з розв'язуванням в рамках класичної і узагальненої термомеханіки зв'язаних і незв'язаних динамічних задач термопружності для масивних тіл. Кандидатську дисертацію "Обобщенные динамические задачи термоупругости для массивных тел" захистила 22 травня 1992 р. (наук. кер. професор М.П. Ленюк).

Дмитро Олексійович Мігуца, кандидат фіз.-мат. наук, доцент. У 1969–2012 рр. – викладач на кафедрі ПММ, доцентом обраний у 1988 р. У 1977 р. захистив кандидатську дисертацію "Динаміка обертальних рухів твердого тіла відносно неголовних осей інерції" (наук. керівник доцент П.П. Вчерашнюк). Досліджував рух твердого тіла відносно центра мас з врахуванням відцентрових моментів інерції і тіл змінної маси, динаміку руху твердого тіла відносно центра мас в неголовних осях інерції під дією гравітаційних та аеродинамічних збурень. Читав лекції з методів наближених обчислень, теоретичної механіки, вищої математики, основ інформатики. Автор понад 45 наукових і 14 навчально-методичних праць

Кафедрою ПММ у 1963–1972 рр. підготовлено **286 фахівців** із прикладної й обчислювальної математики, з яких захистили докторські дисертації **І.С. Мостовяк, В.Ю. Слюсарчук, М.В. Андрєєв, В.К. Ясинський, І.С. Мостовяк, М.Л. Свердан** та понад 15 колишніх студентів захистили кандидатські дисертації з фізико-математичних і технічних наук.

Лаборантами кафедри в той час працювали **Г.М. Островська** (1962–1963 р.), **Л.К. Шеляг** (1965 р.), **Б.О. Коваль** (1966 р.), **Т.Г. Слонецька** та інші.

Другий завідувач кафедри ПММ

Вагомий внесок у розвиток кафедри і напряму з дослідження регулярно і сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь (ДФР) належить випускнику кафедри диференціальних рівнянь ЧДУ **Василю Івановичу Фодчуку** (30.01.1936-09.05.1992), який завідував кафедрою в 1972-1992 рр.

Докторську дисертацію "Асимптотичні методи нелінійної механіки в теорії диференціально-різницевих рівнянь" захистив у 1972 р. В дисертаційній роботі встановлено умови існування і єдиності глобальних та періодичних розв'язків диференціально-різницевих рівнянь. Вперше обґрунтовано метод усереднення на асимптотично великому проміжку для сингулярно збуреної системи із запізненням, розвинуто асимптотичні методи для диференціальних рівнянь нейтрального типу, побудовано й досліджено інтегральні многовиди для ДФР.

20 листопада 1972 р. В.І. Фодчук зарахований на посаду завідувача кафедри ПММ. Тут у повній мірі проявився його науковий, педагогічний та організаторський талант. Він був науковим керівником кандидатських дисертацій: В.А. Домбровського (1972 р.), А. Холматова (1975 р.), М.С. Бортея (1980 р.), Я.Й. Бігун (1981 р.), М.М. Попова (1987 р., науковий. співкерівник А.М. Плічко), І.М. Черевка (1983 р.), І.І. Клевчука(1986 р.), І.В. Якімова (1989 р.).

Наукові результати В.І. Фодчука відображені в монографії [6] і 122 публікаціях . і стосувались широкого кола питань теорії ДФР.

Василь Іванович надавав значної уваги застосуванню математичних методів у прикладних дослідженнях, розвитку комп'ютерного забезпечення кафедри. Під його керівництвом виконувалось три госпдоговірні теми. Також він керував НДР "Наближені методи дослідження систем регулярно і сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь", яка була включена в Республіканську програму.

Професор В.І. Фодчук вдало поєднував наукову та навчально-виховну роботу. За результатами наукових досліджень він читав спецкурс "Додаткові глави фізико-математичних дисциплін", "Асимптотичні методи". Високопрофесійно підходив до викладання вищої математики на загальнотехнічному факультеті.

Відійшов у вічність Василь Іванович Фодчук 9 травня 1992 р. Похований в м. Чернівці.

Викладачі 70-80-х років

З вересня 1973 р. на кафедрі ПММ старшим викладачем працював Володимир К**ирилович Ясинський**, із 1986 р. доцентом кафедри ПММ. Підготував більше 10 кандидатів фізико-математичних наук. Володимир Кирилович – лауреат премії імені Юрія Федьковича з розвитку національної освіти (2003 р.), з 1996 року – професор кафедри математичного моделювання, з 2009 – академік АН ВШ України по відділенню математика.

З 25 грудня 1973 р. до 31 грудня 2001 р. на кафедрі працював **Мирослав Степанович Бортей**, доцент з 1986 р. Кандидатську дисертацію "Дослідження і побудова квазіперіодичних розв'язків нелінійних диференціально-функціональних рівнянь” захистив у 1980 р. (наук. кер. проф. В.І. Фодчук). Досліджував питання асимптотичної звідності нелінійних ДФР та дослідження квазіперіодичних розв'язків ДФР із частинними похідними.

З 1974 р. по 2015 р. на кафедрі працювала **Михайлина Михайлівна Дрінь**, кандидат фізико-математичних наук, доцент з 1989 р. Досліджувала нелокальні крайові задачі для параболічних псевдодиферен-ціальних рівнянь. **У** 1986 р. захистила кандидатську дисер-тацію ”Оператори Гріна параболічних задач спряження” (наук. кер. проф. С.Д. Івасишен). Вела заняття з курсу вищої математики, баз даних та інформаційних систем, числових методів математичної фізики, дискретної математики, математичних моделей природничих процесів. Опублікувала понад 50 наукових і науково-методичних праць.

Доктор фіз.-мат. наук, професор, декан факультету математики та інформатики **Ігор Михайлович Черевко** працював на кафедрі ПММ у 1978–2003 рр., з 1983 р. доцент кафедри. В 1983 р. захистив кандидатську дисертацію ”Дослідження інтегральних многовидів сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь”. Читав курс числові методи, спецкурси з теорії наближень, комп'ютерних мереж. З серпня 2003 р. завідувач кафедри математичного моделювання на факультеті прикладної математики, декан факультету з .

Ним розроблена методика дослідження сингулярно збурених ДФР методом інтегральних многовидів, побудовано й обґрунтовано схеми апроксимації початкових і крайових задач та досліджені ітераційні алгоритми знаходження їх розв'язків. Опублікував понад 200 наукових та навчально-методичних праць, серед яких 1 монографія та 6 підручників.

Ігор Вікторович Якімов працював на кафедрі з 1983 по 2001 рік, доцент кафедри ПММ з 1994 р. Кандидатську дисертацію ”Асимптотичні розклади розв'язків сингулярно збурених диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється” (наук. кер. проф. В.І. Фодчук) захистив у 1989 р. Читав курси з дискретної математики, системного програмування, об'єктно-орієнтованог програмування, теорії складності обчислень. Автор 25 наукових і 3 навчально-методичних праці.

Доктор фіз.-мат. наук, доцент **Іван Іванович Клевчук** працював на кафедрі з 1979 по 1994 р. У 1986 р. захистив кандидатську дисертацію ”Принцип зведення і динамічна еквівалентність для диференціально-функціональ-них рівнянь" (наук. кер. В.І. Фодчук). У 2017 р. захистив док-торську дисертацію "Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-функціональних рівнянь".

З лютого 1979 р. до листопада 1982 р. і з грудня 1985 р. до вересня 1989 р. асистентом кафедри ПММ працював **А.Р. Семчук**. Кандидатську дисертацію "Числове розв'язу-вання задач на власні значення в циліндричній системі координат" захистив у 1992 р.

Лаборантами кафедри працювала **Л.Ю. Доскалюк (**1971–1984 р.), **С.В. Здерчук (**1984–1988 р.), **С.І. Курінна, Г.О. Дяконюк, Н.В. Мухіна** і **О.М. Баланюк**, яка згодом працювала інженером у комп'ютерному класі.

Кафедра ПММ в 90-ті рр.

Завдяки зусиллям кафедри і декана математичного факультету **Володимира Васильовича Крехівського** та його заступника **Богдана Івановича Гольця** кафедра вже мала затверджену спеціальність 0647 – прикладна математика. За 10 років, з 1992 по 2001 рік кафедрою підготовлено 330 фахівців.

З 10 травня 1992 року завідувачем кафедрою ПММ призначено доцента Я.Й. Бігуна. Продовжено виконання роз-початої професором В.І. Фодчуком НДР "Асимптотичні і числово-аналітичні методи дослідження диференціально-функціональних рівнянь". Проведено в 1992 р. нараду-семінар виконавців Республіканської програми, координував яку, тепер академік НАН України, **Микола Олексійович Перестюк**. У 1996 р. була проведено **Всеукраїнську конференцію "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування".** Видано в Інституті математики АН України три збірники наукових праць [7–8] і колективну монографію [6].

У 1996-2001 роках кафедрою прикладної математики і механіки завідував **Петришин Роман Іванович,** тепер перший проректор ЧНУ, доктор фізико-математичних наук, професор. У 1995 р. в Інституті математики НАН України він захистив докторську дисертацію – "Дослідження коливних систем з повільно змінними частотами за допомогою методу усереднення", науковий консультант академік А.М. Самойленко. В 1999–2005 роках – декан математичного факультету, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки (2009 р.).

Р.І. Петришин започаткував на кафедрі прикладної математики дослідження багаточастотних систем з імпульсною дією. Ним доведені нові теореми про обґрунтування методу усереднення Боголюбова для багаточастотних гладких та імпульсних резонансних систем на скінченному і нескінченному інтервалах, знайдено умови розв'язності широких класів багаточастотних систем з багатоточковими та інтегральними умовами і таких же систем з імпульсною дією. Під керівництвом професора Р.І. Петришина захистили кандидатські дисертації Т.М. Сопронюк, П.М. Дудницький та І.М. Данилюк. Читав магістрам і спеціалістам прикладної математики курс з теорії імпульсних систем. Опублікував понад 200 наукових і навчально-методичних праць, серед яких три монографії [10-12] та навчальний посібник з грифом МОНМС [13].

Завідувач кафедри математичного моделювання, канд. фіз.-мат. наук, доцент **Лариса Андріївна Піддубна** з 1992 р. по вересень 2004 р. працювала на кафедрі ПММ**.** Кандидатську дисертацію "Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь звичайними диференціальними рівняннями" захистила в 1999 р. (наук. кер. проф. І.М. Черевко).

З вересня 1989 року до лютого 1999 р. лаборантом кафедри працювала **Є.Д. Супрович,** у 1999–2001 р. **О.М. Сівак**.

Кафедра в 2000-ні роки

У 2001–2002 н.р. кафедра працювала в такому складі: проф. Петришин Р.І. (завідувач кафедри до 01.01.2002 р.), проф. Самойленко А.М., доценти Бігун Я.Й. (завідувач кафедри з 02.01.2002 р.), Дрінь М.М., Котенко Н.В., Маценко В.Г., Мігуца Д.О., Черевко І.М., кандидати фізико-матема-тичних наук Піддубна Л.А., Петришин Я.Р., Філіпчук М.П., викладачі Сопронюк Т.М., викладачі-стажисти Тимку С.М. і Матвій О.В.

На кафедрі за сумісництвом працювали добре знані в Україні і за рубежем науковці. В 1999–2002 рр. і 2010–2011 рр. професором кафедри працював академік НАН України **Анатолій Михайлович Самойленко**, засновник наукової школи з теорії багаточастотних коливань та теорії імпульсних систем, що визнана математичними центрами світу, один з провідних спеціалістів у галузі звичайних диференційних рівнянь та теорії нелінійних коливань. Він автор біля 400 наукових праць, серед яких 30 монографій та 15 учбових посібників. Серед його учнів 33 доктори та 87 кандидатів фізико-математичних наук, які успішно працюють у багатьох математичних центрах ряду країн. За значний внесок в наукову скарбницю й підготовку кадрів у 2003 р. академіка А.М. Самойленка обрано Почесним доктором Чернівецького національного університету. Він був науковим консультантом докторських дисертацій Р.І. Петришина (1995 р.) і Я.Й. Бігуна (2009 р.), під його керівництвом у 2001 р. захистив кандидатську дисертацію викладач кафедри Я.Р. Петришин, а в 2015 р. аспірантка Л.М. Сергєєва.

У 2005–2006 н.р. за сумісництвом працював професор Одеського національного університету **Віктор Олександрович Плотніков**, а в 2008–2010 **Володимир Антонович Стоян**, професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Асистентами за сумісництвом працювали **Ніна Олександрівна Гончарюк** (2002–2004 рр.), **Наталія Михайлівна Яценюк** (2002–2004 рр.).

Кандидат фізико-математичних наук **Павло Миколайович Дудницький** працював на кафедрі в 2002–2012 рр. У 2010 р. захистив кандидатську дисертацію "Асимптотичні методи дослідження багаточастотних систем з імпульсною дією" (наук. кер. – проф. Р.І. Петришин). Досліджував методом усереднення багаточастотні системи з імпульсною дією та з початковими або багатоточковими умовами. Вів навчальні курси з об'єктно-орієнтованого програмування, нейронних мереж, алгоритмів і структур даних, інформатики.

Петришин Ярослав Романович, у 1998–2015 рр. працював на посаді асистента. Досліджував існування та єдиності розв'язків крайових задач з параметрами і багатоточковими та інтегральними умовами для коливних систем та обґрунтування методу усереднення. У 2001 р. захистив кандидатську дисертацію "Усереднення багатоточкових задач для нелінійних коливних систем з повільно змінними частотами" (наук. кер. академік А.М. Самойленко). Викладав курси з інформатики, програмування на Delphi. Опублікував 18 наукових праць і навчально-методичних посібників.

У 2004-2010рр. на кафедрі працював кандидат фізико-математичних наук **Олег Романович Клічук,** доцент кафедри з 2008 р. Займався моделюванням роботи пристроїв обробки інформації. На кафедрі вів курси з інформатики, програмного забезпечення ЕОМ та комп'ютерних мереж. **Юрій Степанович Лінчук** працював на кафедрі з 2005 по 2010 р. Його наукові інтереси – дослідження питань зображення операторів узагальненого зсуву, їх властивостей та застосування. В 2007 р. захистив кандидатську дисертацію "Деякі класи операторів, що діють в просторах аналітичних функцій і пов'язані з комутаційними співвідношеннями" (наук. кер. член-кор. НАН України М.Л. Горбачук). Вів заняття з дискретної математики, теорії інформації та кодування, інформатики.

У 2000-х роках на кафедрі викладачами працювали декілька магістрів, випускників кафедри: **Сергій Михайлович Тимку** (2001–2005 р.), **Надія Володимирівна Родімкіна** (2003–2008 рр.), **Святослав Любомирович Козьменко** (2005–2007 рр.), **Василь Михайлович Данилюк** (2007–2008 рр.), **Наталія Олегівна Стратійчук** (2006–2008 рр.). **Альона Олегівна Данилюк** (2005–2006 рр.), яка захистила в 2010 р. кандидатську дисертацію "Крайові задачі для систем параболічного типу з інтегродиференціальними операторами і виродженнями" (наук. кер. – проф. М.І. Матійчук). Архітектор програмного забезпечення в компанії HelloFlex group **Олександр Мафтейович Ткачик** працював на посаді асистента кафедри в 2011–2012 рр., **Олександр Юрійович Мельничук** у 2012–2013 рр., та **Іван Олександрович Осипов** у 2013–2014 рр.

Сьогодення кафедри прикладної математики та інформаційних технологій

Бігун Ярослав Йосипович, доктор фізико-математичних наук, професор. З травня 1992 р. до грудня 1996 р. і з січня 2002 р. очолює кафедру ПМІТ. У 1974 р. закінчив кафедру МПУіК ЧДУ за спеціальністю "Обчислювальна математика" і з цього часу працює на кафедрі, старший викладач (1981 р.), доцент (1987 р.), професор кафедри прикладної математики (2009 р.).

Кандидатську дисертацію "Розробка й обґрунтування асимптотичних методів для диференціально-функціональних рівнянь" захистив у 1981 р. (наук. кер. – проф. В.І. Фодчук). В 2009 р. захистив докторську дисертацію "Усереднення в багаточастотних системах диференціально-функціональних рівнянь" (наук. консультант академік А.М. Самойленко). Досліджує методом усереднення багаточастотні системи із запізненням, лінійно перетвореним аргументом і точковими та інтегральними умовами, конфліктно керовані процеси з інформаційним запізненням, математичні моделі імунних процесів.

Читає курси з обчислювальних методів, моделювання екологічних і соціальних процесів, математичного моделювання природничих процесів, математичних моделей динамічних систем, паралельного програмування.

Науковий керівник трьох кандидатських дисертацій, вчений секретар спеціалізованої вченої ради К 76.051.02 по захисту кандидатських дисертацій в ЧДУ та докторських дисертацій В Інституті математики та інформатики АН Молдови. Заступник голови підкомісії з розробки стандарту з прикладної математики. У 1999-2004 рр.

депутат Чернівецької міської ради.

Автор понад 180 наукових та навчально-методичних праць, із них монографія у співавторстві та науково-популярна книга [14].

З 2010 року професором кафедри працює доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України, завідувач відділу оптимізації керованих процесів Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України **Аркадій Олексійович Чикрій,** який очолює українську школу динамічних ігор. Автор понад 450 наукових праць, серед яких 5 монографій та 30 міжнародних оглядів в журналах та книгах колективів авторів, більше 150 публікацій за кордоном. Науковий керівник захищених 35 кандидатських та 3 докторських дисертацій. Для магістрів і спеціалістів читає курс "Нелінійні процеси та моделі". Керує науковою роботою магістрів і співробітників кафедри. Під його науковим керівництвом завершив кандидатську дисертацію Є.А. Любарщук.

Маценко Василь Григорович, кандидат фізико-математичних наук, доцент. Закінчив кафедру ПММ у 1975 р. за спеціальністю обчислювальна математика і почав працювати асистентом кафедри ПММ. Під керівництвом академіка М.М. Моісеєва захистив кандидатську дисертацію "Аналіз задач динаміки вікової структури біологічних популяцій"., Доцент кафедри ПММ з 1986 р. член спеціалізованої ради К 076.51.02. Напрям наукових досліджень – математичне моделюванням екологічних систем, аналіз математичних моделей динаміки вікової структури, існування стаціонарних вікових розподілів та їх стійкість, вивчення процесів відбору в розподілених за віком системах, інформаційні технології. Читає курси: обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка, математичне моделювання та системний аналіз, комп'ютерне моделювання еколого-економічних систем, сучасні інформаційні технології. Опублікував понад 90 наукових і 19 навчально-методичних праць, з них 4 з грифом МОН України.

Сопронюк Тетяна Миколаївна, кандидат фізико-математичних наук, доцент. Закінчила ЧДУ у 1982 році за спеціальністю "Прикладна математика". З 1994 р. працює викладачем кафедри ПММ, доцент з 2004 р. У 2003 році захистила кандидатську дисертацію "Коливання імпульсних багаточастотних систем" (наук. кер. проф. Р.І. Петришин). Наукові інтереси: імпульсні коливні системи, математичне моделювання імпульсних систем, інформаційні технології. Веде курси**:** об'єктно-орієнтоване програмування, системне програмування, спеціалізовані мови програмування, теорія компіляції, сучасні технології програмування, математичне моделювання систем з імпульсною дією. Автор понад 60 наукових та 18 навчально-методичних праць.

Філіпчук Микола Петрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент. У 1995 р. закінчив ЧДУ за спеціальністю "Прикладна математика". На кафедрі прикладної математики працює з 1995 р., аспірант (1995-1998 рр.), доцент з 2003 р. У 1999 р. захистив кандидатську дисертацію "Метод усереднення в крайових задачах для диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом" (наук. кер. – доц. Бігун Я.Й.). Досліджує крайові задачі для диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом, розробляє та обгрунтовує схеми чисельно-аналітичного методу для крайових задач для диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом. Викладає курси з дискретної математики, математичної логіки, Інтернет-технологій. Автор понад 30 наукових та навчально-методичних праць.

Богдан Дмитрович Шепетюк, кандитат технічних наук, доцент. Працює на кафедрі на посаді доцента з 2004 р. Закінчив у 1974 р. кафедру МПУіК на математичному факультеті в ЧДУ за спеціальністю "Обчислювальна математика". З 1974 по 1991 рр. працював в Чернівецькому філіалі Київського інституту автоматики. Основними напрямками наукових досліджень є проектування і реалізація розподілених обчислювальних комплексів в автоматизованих системах управління технологічними процесами виробництва, моделювання оптимізаційних задач прикладної гідромеханіки, інформаційні технології. Веде навчальні курси з теорії інформації та кодування, систем захисту інформації, управління проектами, основи інформатики з елементами програмування, інтелектуальної власності. Автор понад 50 наукових та навчально-методичних праць.

Данилюк Іван Михайлович, кандидат фізико-математичних наук, у 2004 р. закінчив ЧНУ й отримав диплом магістра прикладної математики і з цього часу працює на кафедрі. З 2006 по 2009 р. – навчався в аспірантурі. У 2010 р. захистив кандидатську дисертацію "Обгрунтування асимптотичних методів для багаточастотних систем з відхиленим аргументом" (наук. кер., проф. Р.І. Петришин). Досліджує методом усереднення за всіма швидкими змінними багаточастотні нелінійні системи із запізненням та багатоточковими й інтегральними умовами на відрізку і півосі, побудову інтегрального многовиду багаточастотної системи із запізненням. Викладає операційні системи, мережні операційні системи, комп'ютерну алгебру, архітектуру комп'ютерів, інформатику. Автор понад 14 наукових і двох навчально-методичних праць.

Мельник Галина Василівна, кандидат економічних наук. У 1991 р. закінчила ЧДУ за спеціальністю "Прикладна математика", а в 2006 р. – Чернівецький торгівельний інститут КНТЕУ за спеціальністю "Облік і аудит". Викладачем кафедри ПММ працює з 2006 р. З 2016 р. викладач вищої категорії з дисциплін спеціалізації та інформатики. У 2014 р. захистила кандидатську дисертацію "Моделювання аналізу та оцінювання інформаційних ризиків у корпоративних системах" (наук. кер. проф. В.В. Вітлінський). Досліджує теоретичні та практичні методи побудови моделей бізнес-процесів в інформаційних системах з використанням мереж Петрі різних модифікацій.

Читає курси з математичної теорії ризиків, інформаційних систем менеджменту та маркетингу, сучасних СУБД, логічних алгоритмів та систем штучного інтелекту, математичних методів і моделей прийняття рішень, основ інформатики та комп'ютерної техніки. Автор біля 30 наукових праць та 9 навчальних посібників.

Краснокутська Інесса Володимирівна, кандидат фізико-математичних наук. У 2008 р. закінчила кафедру прикладної математики. В 2015 р. захистила кандидатську дисертацію "Усереднення багаточастотних систем з нетеровими крайовими умовами" (наук. кер. проф. Я.Й. Бігун). Досліджує нетерові крайові задачі для багато-частотних систем диференціальних рівнянь, автоматизацію роботи медичних установ, використання інформаційних технологій в сучасній освіті. Викладає курси: алгоритми та структури даних, розробка UI/UX дизайну, нові інформаційні технології, паралельне програмування. Сертифікований спеціаліст рівня Master з C Fundamental. Отримала сертифікати Coursera з відзнакою Стенфордського та Прінстонського університетів та сертифікат Aptis рівня C володіння англійською мовою. Учасник проектів, що популяризують навчання програмуванню українською мовою. Виконавець проекту "Забезпечення якості освіти в Україні: розвиток на базі стандарту ENQA – QUAERE".

Сергєєва Лідія Миколаївна у 2006 р. закінчила кафедру прикладної математики і працювала на посаді асистента. З 2008 р. навчалася в аспірантурі. У 2015 р. захистила кандидатську дисертацію "Глобальна апроксимація розв'язків диференціально-функціональних рівнянь" (науковий керівник – академік А.М. Самойленко). Викладає дисципліни Java-технології в клієнт-серверних системах, дискретна математика, інформатика та системологія. Досліджує глобальні розв'язки функціонально-диференціальних рівнянь, рівнянь нейтрального типу, диференціальних рівнянь з частинними похідними, що містять відхилення за часом; математичне моделювання екологічних та епідеміологічних процесів. Опублікувала понад 30 наукових і навчально-методичних праць.

Магістр прикладної математик **Скутар Ігор Дмитрович** закінчив ЧНУ за спеціальністю "Прикладна математика". Працює на кафедрі викладачем з 2002 р., аспірант (2004–2008 рр.). Веде заняття з дискретної математики, серверної мови PHP, Web-технологій в Інтернеті. Фахівець в сучасних Web-технологіях. Тематикою наукових досліджень є асимптотичні методи для диференціальних рівнянь із звичайними та частинними похідними.

Любарщук Євген Анатолійович, магістр прикладної математики, закінчив кафедру ПММ у 2011 р. На посаді асистента кафедри працює з 2011 р. Викладає дисципліни з програмування, Frontend-розробки Web-додатків, конфліктно-керованих процесів. Під керівництвом член-кореспондента НАН України А.О. Чикрія підготував до захисту кандидатську дисертацію "Диференціально-різницеві ігри зближення". Опублікував 10 наукових праць.

Романенко Наталія Вікторівна, завідувач лабораторії "WEB-технології та комп'ютерне моделювання", працює в комп'ютерному класі й за сумісництвом на кафедрі з 1995 р. Веде навчальні дисципліни з технології програмування на Java, контролю якості та тестування програмного забезпечення, проектування програмних систем. Опублікувала 15 наукових праць, навчальні посібники з інформатики та з технології програмування мовою Java.

Юрійчук Анастасія Олександрівна, магістр прикладної математики, закінчила кафедру ПММ у 2012 р. і з цього часу працює асистентом кафедри. Веде лабораторні і практичні заняття з числових методів, системного аналізу, моделювання екологічних, економічних і соціальних процесів та інформатики. Наукові інтереси стосуються диференціально-різницевих рівнянь.

Лаборантами кафедри працювали **Оксана Василівна Когут** (2003–2009 рр.)**, Василь Миколайович Лазоряк** (2009–2010 рр.)**, Богдан Васильович Дячінський** (2010–2011 рр.), **Тетяна Сергіївна Тодоріко** (2010–2013 рр.)**. Тетяна Василівна Кнігніцька** працювала у 2013–2016 рр., тепер аспірант кафедри. Із жовтня 2016 р. старшим лаборантом кафедри працює магістр математики **Світлана Василівна Никифорук**.

Список літератури

1. Кафедра математического анализа // Черновицкий государственный университет. Научный ежегодник за 1959 г. – С. 509.
2. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. – М.: Наука, 1969. – 287 с.
3. Рубаник В.П. Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием. – Минск: Изд-во "Университетское", 1985. – 143 с.
4. Рубаник В.П. Основные принципы разработки и функционирования АСУ. – К.: Вища школа, 1977. – 183 с.
5. Вчерашнюк П.П. Динамика космического полета: учебное пособие. – Черновцы: ЧГУ, 1983. – 129 с.
6. Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння. / В.І. Фодчук, Я.Й. Бігун, І.І. Клевчук, І.М. Черевко, І.В.Якімов. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 210 с.
7. Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування: Зб. наук. пр. / АН України. Ін-т математики: Редкол.: Ю.О. Митропольський, Я.Й. Бігун, І.І. Клевчук, В.Г. Коломієць, І.М. Черевко. – Київ, 1992. – 169 с.
8. Конструктивні методи дослідження диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. / АН України. Ін-т математики: Редкол.: Ю.О. Митропольський, Я.Й. Бігун, І.І. Клевчук, В.Г. Коломієць, І.М. Черевко. – Київ, 1993. – 180 с.
9. Системи еволюційних рівнянь з післядією: Зб. наук. пр. / НАН України. Ін-т математики: Редкол.: Ю.О. Митропольський, Я.Й. Бігун, В.Г.Коломієць, І.М. Черевко. – Київ, 1994. – 156 с.
10. Самойленко А.М., Петришин Р.І. Багаточастотні коливання нелінійних систем – К.: Ін-т математики, 1998. – 340 с.
11. A. Samoilenko and R. Petryshyn. Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems. – DODRECH BOSTON/LONDON: Kluwer Academic Publishers. –2004. – 317 p.
12. Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наукова думка, 2004. – 474 с.
13. Петришин Р.І., Сопронюк Т.М. Наближені методи розв'язування диференціальних рівнянь з імпульсною дією: навч. посібник. – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2010. – 200 с.

14. Ярослав Бігун, Лілія Фодчук, Василь Харитон Маг чисел. – Снятин: Музично-видавничий дім "В. Лазаренко", 2014. – 75 с.
15. Маценко В.Г. Комп'ютерна графіка: Навчальний посібник. – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2009. – 343 с.
16. Маценко В.Г. Математичне моделювання: навч. Посібник. – Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2014. – 519 с.
17. Сопронюк Т.М. Об'єктно-орієнтоване програмування на C++: навч. посібник. – Чернівці: Чернівецький національний ун-т, 2014. – 176 с.

Випускники кафедри, які захистили докторські дисертації

1. Мостовяк Іван Васильович

Ланцюги врівноважених режимів багатофазних систем із нестаціонарними і нелінійними несиметричними елементами (принципи побудови, аналіз і синтез), тех. науки, спеціальність 05.09.05 – теоретична електротехніка, 1986 р.

2. Слюсарчук Василь Юхимович

Обмежені розв'язки функціональних і функціонально-диференціальних рівнянь, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.01.02 – диференціальні рівняння та математична фізика, 1987 р.

3. Андрєєв Микола Варфоломійович

Методи редукції в задачах керування, зупинки і контролю ймовірнісних моделей, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.01.11 – системний аналіз та автоматичне керування, 1992 р.

4. Ясинський Володимир Кирилович

Математичні методи дослідження стійкості стохастичних систем з післядією при наявності пуассоновських збурень, фіз.-мат. науки, спеціальність – 01.05.01 – математична кібернетика – 01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика, 1993 р.

5. Сопронюк Федір Олексійович

Дослідження систем керування зі зміною вимірності фазового простору, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи, 1996 р.

6. Свердан Михайло Леонович

Стійкість імпульсних динамічних систем з випадковими збуреннями, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.01.02 – диференціальні рівняння, 1997 р.

7. Григорків Василь Степанович

Оптимізаційні динамічні моделі еколого-економічної рівноваги, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи, 2000 р.

8. Черевко Ігор Михайлович

Інтегральні многовиди та апроксимаційні алгоритми дослідження диференціально-функціональних рівнянь, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.01.02 – диференціальні рівняння, 2004 р.

9. Попов Михайло Михайлович

Вузькі оператори та геометрія просторів, фіз.-мат. науки, спеціальність спеціальність 01.01.01 – математичний аналіз, 2006 р.

10. Петрик Михайло Романович

Математичне моделювання полів масопереносу в неоднорідних і нанопористих середовищах та ідентифікація їх параметрів, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи, 2013 р.

11. Клевчук Іван Іванович

Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-функціональних рівнянь, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.01.02 – диференціальні рівняння, 2017 р.

12. Карлова Олена Олексіївна

Класифікація і продовження аналогів неперервних відображень, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.01.04 – геометрія і топологія, 2017 р.

Штатні викладачі та співробітники кафедри, які працюють або працювали на кафедрі і захистили докторські дисертації

1. Рубаник Василь Павлович

Коливання квазілінійних систем з запізнюючими зв'язками,

фіз.-мат. науки, спеціальність 01.01.02 – диференціальні рівняння, 1969 р.

2. Фодчук Василь Іванович

Асимптотичні методи нелінійної механіки в теорії диференціально-різницевих рівнянь, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.003 – диференціальні й інтегральні рівняння, 1972 р.

3. Царков Євгеній Федорович

Випадкові збурення систем з післядією, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика, 1982 р.

4. Петришин Роман Іванович

Дослідження коливних систем з повільно змінними частотами за допомогою методу усереднення, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.01.02 – диференціальні рівняння, 1995 р.

5. Нестерук Ігор Георгійович

Обернені нестаціонарні задачі гідромеханіки високошвидкісних тіл, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.02.05 – механіка рідини, газу та плазми, 2004 р.

6. Бігун Ярослав Йосипович

Усереднення в багаточастотних системах диференціально-функціональних рівнянь, фіз.-мат. науки, спеціальність 01.01.02 – диференціальні рівняння, 2009 р.

100-РІЧЧЯ З ДНЯ НАРОДЖЕННЯ ПРОФЕСОРА ВАСИЛЯ ПАВЛОВИЧА РУБАНИКА

Ярослав Бігун, Володимир Крехівський,
Василь Слюсарчук, Ліна Федоренко,
Петро Ярема, Володимир Ясинський

Василь Павлович Рубаник
(14.01.1917 – 09.04.1993)

Минуло 100 років від дня народження відомого українського математика, знаного спеціаліста в галузі теорії нелінійних коливань, доктора фізико-математичних наук, професора Василя Павловича Рубаника. Народився він 14 січня 1917 року (1 січня за старим стилем) у селі Клишки Шосткінського району Сумської області в селянській родині. Після закінчення Клишковецької трудової школи з 1935 по 1937 рік працював робітником на підприємствах м. Шостки і в той же час навчався в Шосткінському вечірньому хімробфаці. У 1938 році В.П. Рубаник поступив на фізико-математичний факультет Київського державного університету.

З 1941 року по 1945 рік В.П. Рубаник брав участь у бойових діях Другої світової війни. Нагороджений орденами Вітчизняної війни I і II ступеня, офіцер-танкіст. Повернувшись з армії в чині старшого лейтенанта танкових військ, він з 1946 року по 1950 рік він працював вчителем математики і фізики в школах м. Шостки, одночасно завершуючи заочну освіту на фізико-математичному факультеті Київського педагогічного інституту, який закінчив у 1948 році зі спеціальності фізика.

У 1950 році вступив до аспірантури Київського державного університету (його науковим керівником був професор Ю.О. Митропольський), яку закінчив у 1953 році з захистом кандидатської дисертації "Резонансные явления в некоторых нелинейных системах".

Із вересня 1953 року наукова і педагогічна діяльність В.П. Рубаника пов'язана з Чернівецьким державним університетом. У 1953 – 1954 роках він працював на кафедрі диференціальних рівнянь на посаді старшого викладача, наступні два роки виконував обов'язки завідувача цієї кафедри. З березня 1956 року – доцент кафедри диференціальних рівнянь, а з грудня 1958 року і до кінця 1960-1961 навчального року знову виконував обов'язки завідувача кафедри. Був деканом фізико-математичного факультету в 1960 – 1961 роках. З вересня 1961 по травень 1962 року виконував обов'язки завідувача кафедри математичного аналізу. У 1968–1972 роках – проректор із наукової роботи Чернівецького державного університету.

У 1964 році В.П. Рубаник захистив докторську дисертацію "Колебания квазилинейных систем из запаздывающими связями", науковий консультант – дійсний член Академії наук УРСР Ю.О. Митропольский.

В.П. Рубаник надавав значної уваги науковій тематиці прикладного характеру. За його ініціативою в 1962 році була створена кафедра прикладної математики і механіки, якою він завідував у 1962–1972 роках. У 1972 році він заснував кафедру математичних проблем управління і кібернетики, завідувачем якої був до 1976 року.

В.П. Рубаник започаткував наукову тематику, яка на той час була досить популярною в Україні і за рубежем, мала прикладне значення і не залишається поза увагою і в наш час. Він та його учні досліджували квазілінійні коливні системи із запізненням під дією детермінованих та випадкових збурень. Для таких систем розвивався метод усереднення й асимптотичний метод Крилова-Боголюбова, вивчалася взаємодія й синхронізація в нелінійних коливних системах із запізненням. Василь Павлович разом з учнями дослідив процеси самозбудження та синхронізації коливань у автоколивальних системах із запізненням і з лініями зворотного зв'язку, параметричні збурення коливань, які обумовлені періодичною зміною запізнення та інші важливі для теорії і практики задачі. Спільно з Є.Ф. Царковим він започаткував дослідження стохастичних диференціальних рівнянь із запізненням.

Професор В.П. Рубаник володів чудовою рисою дослідника – науковою інтуїцією, разом з людяністю, оптимізмом і вірою в успіх знаходив серед студентів, молодих співробітників виконавців задуманих ідей. Він чітко розумів, що детерміновані математичні моделі не завжди адекватно описують реальні процеси. А врахувати випадкові впливи – значить створити більш точну і тонку математичну модель. Ось чому був запрошений з м. Риги бувший випускник ЧДУ Є.Ф. Царков у 1968 році на роботу на кафедру ПММ, який самостійно написав за 10 місяців кандидатську дисертацію.

Ще одним напрямом наукових пошуків В.П. Рубаника було дослідження коливних процесів як у детермінованому випадку, так і для стохастичних квазілінійних систем рівнянь із запізненням, що містять взаємозв'язані рівняння із звичайними і частинними похідними.

В.П. Рубаник доклав значних зусиль для організації і проведення в 1965, 1968 і 1972 роках трьох Всесоюзних міжвузівських конференцій із теорії та застосувань диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється.

В його науковому доробку дві монографії: "Колебания квазилинейных систем с запаздыванием" (1969 р.) і "Колебания сложных квазилинейных систем с запаздыванием" (1985 р.), посібник "Основные принципы разработки и функционирования АСУ"(1977 р.) та біля 80 наукових публікацій. Бібліографічний список праць наведено в [2].

В.П. Рубаник впроваджував нові спецкурси для спеціалістів з обчислювальної математики, зокрема, з автоматизованих систем керування. Глибоко розуміючи роль ЕОМ у науково-технічному прогресі, він дбав про поповнення технічної бази, розвиток обчислювального центру університету, який став і центром підготовки науково-педагогічних кадрів, науковим центром і місцем практики студентів.

З 1968 по 1976 роки професор В.П. Рубаник та Є.Ф. Царков разом керували науковими пошуками М.І. Букатаря, М.М. Ігнатенко, А.М. Садов'яка, Б.О. Коваля, які досліджували існування розв'язків та асимптотичну поведінку стохастичних диференціальних систем. Ці наукові доробки згодом вилилися у кандидатські дисертації. В.П. Рубаник і Є.Ф. Царков започаткували наукову школу з якісного дослідження стохастичних диференціально-функціональних рівнянь яку постійно підтримували академіки НАН Україні, В.С. Королюк та А.В. Скороход.

В.П. Рубаник зробив вагомий внесок у підготовку спеціалістів вищої кваліфікації. Під його керівництвом, а також разом із професором Є.Ф. Царковим, захищено 16 кандидатських дисертацій. Більшість його учнів працювали в Чернівецькому державному університеті.

У 1976 році В.П. Рубаник переїхав у місто Гомель. Працюючи в Гомельському державному університеті імені Ф. Скорини, Василь Павлович зробив вагомий внесок у розвиток математичного факультету університету. Він створив наукову лабораторію системного програмування, сприяв створенню кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики, відкрив нові прикладні спеціалізації, встановив наукові зв'язки з академічними інститутами та підприємствами Білорусі, продовжив наукові дослідження з теорії нелінійних коливань. Результати наукових досліджень білоруського періоду життя лягли в основу його останньої монографії . У різний час він очолював кафедри математичних проблем управління, обчислювальної математики і програмування, працював професором. У грудні 1989 року за станом здоров'я Василь Павлович вийшов на пенсію.

Відкриття нових спеціальностей та спеціалізацій вимагало розробки і читання нових професійно-орієнтованих та спеціалізованих курсів. Василь Павлович своїми прекрасними лекціями виховав цілу групу майбутніх педагогів вищої кваліфікації як у Чернівецькому, так і в Гомельському університетах. Широка ерудиція, висока педагогічна майстерність, захоплення наукою завжди викликали у його слухачів живий інтерес до його лекцій.

Усе свідоме життя Василя Павловича було віддане математиці. Саме в ній він бачив зміст життя, можливість реалізувати себе.

Василь Павлович любив і цінував природу, багато подорожував, виростив прекрасний сад, любив класичну музику і живопис, його часто можна було зустріти на концертах класичної музики в Чернівецькій філармонії.

Відійшов у вічність 9 квітня 1993 року, похований у білоруському місті Гомель.

Проректор із наукової роботи ЧДУ професор В.П. Рубаник

В.П. Рубаник офіцер-танкіст

В.П. Рубаник на зустрічі зі студентами в гуртожитку.
Справа-наліво: М.Л. Свердан, З.Л. Кравченко,
П.Ф. Ярема, П.П. Вчерашнюк

Сторінкам життя і діяльності Василя Павловича присвячені праці:

1. *Бігун Я.Й., Слюсарчук В.Ю., Ярема П.Ф. До 100-річчя з дня народження професора В.П. Рубаника // Буковинський мат. журн. – 2016. – 4, № 3–4. – С. 13–14.*
2. *Крехівський В.В., Федоренко Л.М., Ярема П.Ф., Ясинський В.К. Наукова, педагогічна та організаторська діяльність професора Василя Павловича Рубаника // Дослідження математичних моделей. Зб. наук. праць. – АН України, 1997. – С. 4–14.*
3. *Ярема П.Ф. Спогади про вчителя // Дослідження математичних моделей. Зб. наук. праць. – АН України, 1997. – С. 263–268.*

Аспіранти В.П. Рубаника, які захистили кандидатські дисертації

1. Ножак Г.В. Построение процессов в амплитудных импульсных системах с распределенными параметрами. – Черновцы, 1966.
2. Гайсенюк Б.С. Построение переходных процессов в системах управленния. – Киев, 1973.
3. Букатарь М.И. Исследование случайних процессов в квазилинейных стохастических дифференциальных уравнениях с запаздыванием. – Черновцы, 1969.
4. Ярема П.Ф. Некоторые задачи синхронизации автоколебательных систем с запаздыванием. – Черновцы, 1970.
5. Слюсарчук В.Ю. Устойчивость решений разностных уравнений в бапаховом пространстве. – Рига, 1972.
6. Федоренко Л.М. Исследованпе решений дифференциальных уравнений с частными производными в классах случайных функций. – Черновцы, 1974.
7. Коваль Б.О. Некоторые вопросы устойчивости решений счетных систем дифференциальных уравнении. – Черновцы, 1974.
8. Садовяк А.М. Системы линейных стохастических дифференциальных уравнений. – Рига, 1975.
9. Вальковская В.И. Исследование стохастических термоупругих полей в континуальних обьектах. – Киев, 1981.
10. Лакуста К.В. Математическое обоснование и исследования динамических процессов в однородных и кусочно-однородных телах с учетом конечной скорости распространения тепла. – Черновцы, 1981.
11. Жогаль С.П. Влияние случайных возмущений на некоторе сложные колебательные системи, описываемые дифференциально-функциональными уравнениями. – Киев, 1991.

Здобувачі В.П. Рубаника, які захистили кандидатські дисертації

1. Царьков Е.Ф. Квазилинейные стохастические дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – Рига, 1996.
2. Марченко Ю.И. Взаимная синхронизация автоколебательных систем при наличии волновых и запаздывающих связей. – Киев, 1967.
3. Игнатенко М.М. Исследование случайных процессов в линейных системах с запаздыванием. – Черновцы, 1968.
4. Середюк З.Л. Применение стробоскопического метода Н.Минорского к исследованию квазилинейных систем с запаздыванием. – Черновцы, 1969.
5. Старик Л.К. О взаимодействии колебательной системы с неидеальным источником энергии при наличии запаздывающих связей. – Черновцы, 1972.

Микола Андреєв [1], *Віталій Статкевич* [2]

Про одну задачу керування неоднорідним процесом народження та загибелі на прикладі процесу лінійного зростання з імміграцією

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", Інститут прикладного системного аналізу, Київ, Україна
[1] *E-mail: nvandreev@ukr.net*
[2] *E-mail: mstatckevich@yahoo.com*

Розглядається неоднорідний в часі процес народження та загибелі [1]–[5]. Це марковський процес $\xi(t)$, $t > 0$ зі станами $\{0, 1, 2, \ldots\}$, для якого з кожного стану $\xi(t) = n > 0$ можливі лише переходи у стани $n-1$ та $n+1$, і до того

$$P\{\xi(t+\Delta t) = n+1/\xi(t) = n\} = n\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t),$$
$$P\{\xi(t+\Delta t) = n-1/\xi(t) = n\} = n\mu(t)\Delta t + o(\Delta t),$$
$$P\{\xi(t+\Delta t) = n/\xi(t) = n\} = 1 - n(\lambda(t)+\mu(t))\Delta t + o(\Delta t).$$

Тут $\lambda(t) > 0$ та $\mu(t) > 0$ – інтенсивності народження та загибелі відповідно, неперервні на $(0; +\infty)$ функції. В початковий момент часу $\xi(0) = 1$, можливість самозародження не розглядається, тобто, перехід зі стану 0 у стан 1 неможливий, а також відношення $\frac{\mu(t)}{\lambda(t)} = c > 0$ стале для будь-якого $t > 0$. Позначимо: $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(\tau)d\tau$ – інтегральна інтенсивність народження, $P_n(t) = P\{\xi(t) = n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. В [3] для $P_n(t)$ доведені наступні формули:

$$P_0(t) = \frac{1}{1+\Lambda^{-1}(t)}, \quad c = 1; \quad P_0(t) = \frac{c(1-e^{\rho(t)})}{1-ce^{\rho(t)}}, \quad c \neq 1; \tag{1}$$

$$P_n(t) = \frac{e^{\rho(t)}}{c^{n-1}} P_0^{n-1}(t)(1-P_0(t))^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

де $\rho(t) = (c-1)\Lambda(t)$. В [3] сформульовані, а в [5] досліджені три задачі: задача мінімізації ймовірності виходу процесу при $t \to +\infty$ зі смуги; задача керування з урахуванням стабілізуючої функції; задача мінімізації математичного сподівання моменту виродження процесу за малої ймовірності перевищення порогу.

В даних тезах доповнена остання задача. Момент ξ виродження процесу $\xi(t)$, тобто, момент зникнення всієї популяції, має вигляд

$$M\xi = \int\limits_0^{+\infty} t dP_0(t) = \int\limits_0^{+\infty} t \frac{d}{dt} P_0(t) dt \to \min_c, \tag{3}$$

а ймовірність того, що для будь-якого $t > 0$ ймовірність перевищення порогу $N - 1$ не перевищує α, має вигляд

$$\forall t > 0 \quad P\{\xi(t) \geqslant N\} \leqslant \alpha, \tag{4}$$

де $N \in \mathbb{N}$, а $\alpha > 0$ – задане мале число. В [5] знайдено умови збіжності $M\xi$ (3), спрощено умови ймовірності перевищення порогу (4), а сама задача розв'язана аналітично у випадку постійної інтенсивності народження $\lambda(t) \equiv \lambda_0$. Наразі доповідається розв'язання задачі у випадку $\lambda(t) = \alpha_0 t + \beta_0$, де $\alpha_0 > 0$ та $\beta_0 > 0$, таку інтенсивність народження має процес лінійного зростання з імміграцією.

Задачу зручно розглядати у вигляді двох підзадач. Перша підзадача відповідає випадку $c > 1$. Застосуємо в (3) формулу інтегрування частинами та підставимо формули (1):

$$M\xi = (c-1) \lim_{R \to +\infty} \left(\frac{R}{1 - ce^{(c-1)\Lambda(R)}} - \int\limits_0^R \frac{dt}{1 - ce^{(c-1)\Lambda(t)}} \right).$$

Перший доданок у правій частині формули при $R \to +\infty$ прямує до нуля, тому

$$M\xi = (c-1) \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{ce^{(c-1)\Lambda(t)} - 1} <$$

$$< (c-1) \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{ce^{(c-1)\beta_0 t} - 1} = \frac{1}{\beta_0} \ln\left(1 + \frac{1}{c-1}\right) \tag{5}$$

(останню рівність отримано заміною $u = e^{(c-1)\beta_0 t}$ з подальшим розкладом на прості дроби). З наведеної оцінки $M\xi \to 0$ при $c \to +\infty$

(тобто, практично миттєве зникнення всієї популяції), умови (4) в даному випадку не впливають на результат [5, теорема 3] і підзадача розв'язку не має. Зауважимо: для будь-якої функції $\lambda(t) \geqslant \lambda_0 > 0$ такої, що $\lambda(t) = O(t^\gamma)$ при $t \to +\infty$ для деякого $\gamma > 0$, виконуються щойно наведені викладки (1) та $M\xi \to 0$ при $c \to +\infty$.

Друга підзадача відповідає випадку $c < 1$. Інтеграл (3) після підстановки формул (1) приймає вигляд

$$M\xi = (c-1)^2 c \int\limits_0^{+\infty} \frac{te^{(c-1)\Lambda(t)}\lambda(t)}{(1-ce^{(c-1)\Lambda(t)})^2} dt.$$

Даний інтеграл розбито на два інтеграли I_1 та I_2 по проміжках $[0; t_0]$ та $[t_0; +\infty)$, де $t_0 > 0$, із наступною заміною $t \mapsto \frac{1}{t}$ в інтегралі I_2, після чого обидва інтеграли обчислено чисельно методом трапецій. $M\xi$ монотонно зростає при $0 < c < 1$, приклад обчислення $M\xi$ для $\alpha_0 = 0.1$ та $\beta_0 = 1$ наведено в таблиці.

c	$M\xi$	c	$M\xi$	c	$M\xi$
0.1	0.0142	0.4	0.0814	0.7	0.2405
0.2	0.0317	0.5	0.1181	0.8	0.3539
0.3	0.0535	0.6	0.1683	0.9	0.5424

За рахунок монотонного зростання $M\xi$ на інтервалі $0 < c < 1$ розв'язок другої підзадачі залежить від умов (4), а саме (з урахуванням теореми 3 [5]) від співвідношення N та α:

$$c \geqslant \frac{N-1}{N \sqrt[N-1]{\alpha N}}, \text{ якщо } c > 1 - \frac{1}{N}; \quad c > 1 - \alpha, \text{ якщо } c \leqslant 1 - \frac{1}{N}.$$

Якщо $\alpha N \geqslant 1$, то $c_* = 1 - \alpha$, інакше $c_* = \frac{N-1}{N \sqrt[N-1]{\alpha N}}$.

[1] Kendall D.G. *On the Generalized "Birth-and-Death" Process* // Ann. Math. Statistics. – 1948. – **19**, 1. – P. 1–15.

[2] Бартлетт М.С. *Введение в теорию случайных процессов.* – М.: ИЛ, 1958. – 384 с.

[3] Horalek V. *Nonhomogeneous birth-death processes with constant ratio of rates* // Aplikace matematiky. – 1966. – **11**, 4. – P. 296–302.

[4] Андреев Н.В., Штатланд Э.С. *О некоторых задачах управления неоднородными процессами рождения и гибели* // Труды семинара "Теория оптимальных решений". – К., 1968. – **4**. – С. 42–46.

[5] Андреев Н.В., Статкевич В.М. *Некоторые задачи управления неоднородными процессами рождения и гибели* // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2016. – 3. – С. 101–117.

Ярослав Бігун, Роман Петришин

Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореними аргументами і точковими та інтегральними умовами

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: yaroslav.bihun@gmail.com

Досліджено питання існування розв'язку та обгрунтування методу усереднення для багаточастотних систем диференціальних рівнянь із багатьма лінійно перетвореними аргументами вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = X(\tau, x_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, x_\Lambda, \varphi_\Theta) \tag{1}$$

та із багатоточковими й інтегральними умовами:

$$x(0) + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j x(\xi_j) = d_1, \tag{2}$$

$$\varphi(0) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Big[\sum_{j=1}^{q} g_j(\tau, x_\Lambda(\tau))\varphi_{\theta_j}(\tau) + f(\tau, x_\Lambda(\tau), \varphi_\Theta(\tau))\Big] d\tau = d_2. \tag{3}$$

Тут $0 \le \tau \le L$, $x \in D$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$, $\lambda_i, \theta_j \in (0, 1)$, $x_{\lambda_i}(\tau) = x(\lambda_i \tau)$, $\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi(\theta_j \tau)$, $0 < \xi_1 < \dots < \xi_l \le L$, d_1 і d_2 – задані $n-$ і $m-$вектори відповідно.

Для встановлення результатів використано методику дослідження багаточастотних систем [1] і розширено клас задач, розглянутих в [2]. У роботі [3] розглянуто ввипадок. коли для повільнох змінної задається умова в одній точці на проміжку $[0, L]$.

У процесі еволюції система (1) може проходити через резонанси, що суттєво ускладнює дослідження існування розв'язку та обгрунтування методу усереднення. Умовою резонансу в точці τ є виконання рівності [2, 3]

$$\sum_{\nu=1}^{q} \theta_\nu (k_\nu, \omega(\theta_\nu \tau)) = 0, \quad k_\nu \in \mathbb{R}^m, \quad \|k\| \ne 0.$$

В системі рівнянь (1) і в умові (3) усереднення здійснюється за швидкими змінними ϕ_i. Усереднена задача набуває вигляду

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = X_0(\tau, \overline{x}_\Lambda), \quad \frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \overline{x}_\Lambda), \tag{4}$$

$$\overline{x}(0) + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \overline{x}(\xi_j) = d_1,$$

$$\overline{\varphi}(0) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \big[\sum_{j=1}^{q} g_j(\tau, \overline{x}_\Lambda(\tau))\overline{\varphi}_{\theta_j}(\tau) + f_0(\tau, \overline{x}_\Lambda(\tau))\big] d\tau = d_2 \tag{5}$$

і є значно простішою, ніж задача (1)–(3). У роботі доведено існування розв'язку задачі (4), (5), обгрунтовано метод усереднення для повільних змінних й одержано оцінке похибки методу усереднення

$$\|x(\tau, \varepsilon) - \overline{x}(\tau)\| \leq c\varepsilon^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq (mq)^{-1},$$

яка виконується для всіх $\tau \in [0, L]$ при досить малому $\varepsilon_0 > 0$. Розглянуто частинні випадки умов (2) і (3).

Зауваження. Одержані результати залишаються правильними також для багаточастотних систем вигляду (1) з перетвореними аргументами $\lambda_i : [0, L] \to [0, L]$, і $\theta_j : [0, L] \to [0, L]$ де $\lambda_i'(\tau) \neq 0$ і $\theta_j'(\tau) \neq 0$ for $\tau \in [0, L]$, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, s}$. Умова "незастрягання" траєкторії повільних змінних системи (1) в малому околі резонансу формулюється через визначник Вронського $V(\tau)$ з вектором $\omega^T(\tau), \omega^T(\theta_1(\tau))\theta_1'(\tau), \ldots, \omega^T(\theta_s(\tau))\theta_s'(\tau)$ у першому рядку, T – символ транспонування. Наприклад, для $m = s = 1$ умова набуває вигляду

$$det \begin{bmatrix} \omega(\tau) & \omega(\theta(\tau))\theta'(\tau) \\ \omega'(\tau) & \omega'(\theta(\tau))\big(\theta'(\tau)\big)^2 + \omega(\theta(\tau))\theta''(\tau) \end{bmatrix} \neq 0, \qquad \tau \in [0, L].$$

[1] Самойленко А.М., Петришин Р.І. *Математичні аспекти теорії нелінійних коливань*, Наукова думка, Київ, 2004.

[2] Бігун Я.Й. *Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням*, Укр. мат. журн., **59, №4**, (2007), с. 485–499.

[3] Бігун Я.Й., Краснокутська І.В., Петришин Р.І. *Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореними аргументами і точковими та інтегральними умовами*, Буковинський мат. журн., **4, №3–4**, (2016), с. 30–35.

Андрій Бомба [1], Олена Присяжнюк [2], Михайло Бойчура [3]

Методи комплексного аналізу і теорії збурень в задачах ідентифікації

[1,2,3] *Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна*
E-mail: [1] *abomba@ukr.net,* [2] *lenapris@ukr.net,* [3] *mboichura@gmail.com*

Розглядаються процеси фільтрації в пористому пласті – однозв'язній криволінійній області G_z (рис. 1), обмеженій гладкою замкненою кривою $\partial G_z = \{(x,y):\ x = \tilde{x}(\tau),\ y = \tilde{y}(\tau),\ 0 \le \tau \le 2\pi,$ $\tilde{x}(0) = \tilde{x}(2\pi) = \tilde{x}_0,\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}(2\pi) = \tilde{y}_0$, де $\tilde{x}(\tau),\ \tilde{y}(\tau)$ – визначені неперервно диференційовані функції, $O\left(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0\right)$ – задана початкова точка відліку$\}$ (рис. 1), породжені діями різниць потенціалів $\varphi_*^{(p)}$ та $\varphi^{*(p)}$ $\left(\varphi^{*(p)} - \varphi_*^{(p)} > 0\right)$ на заданих еквіпотенціальних лініях A_pB_p та C_pD_p, де A_p, B_p, C_p, D_p – відмічені точки на ∂G_z; B_pC_p та A_pD_p – непроникні граничні лінії течій. В основі відповідної модельної задачі на відшукання функцій $\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(x,y)$ (потенціалів) та $\psi^{(p)} = \psi^{(p)}(x,y)$ (течій) для кожної (p-ї) із $\tilde{p}$ $(1 \le p \le \tilde{p})$ інжекцій [4] за умови ідентифікації коефіцієнта провідності (КП) $\sigma = \sigma(x,y)$ [1 – 4] є такі співвідношення:

$$\sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial x} = \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial y},\ \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial y} = -\frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial x}; \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\varphi^{(p)}\left|_{A_pB_p} = \varphi_*^{(p)},\ \varphi^{(p)}\right|_{C_pD_p} = \varphi^{*(p)},\\ \psi^{(p)}\Big|_{A_pD_p} = 0,\ \ \psi^{(p)}\Big|_{B_pC_p} = Q^{(p)};\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{MN} \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial n} = Q^{(p)},\ M \in B_pC_p,\ N \in A_pD_p\,,\\ \varphi\left(M\right)\left|_{B_pC_p} = \bar{\varphi}^{(p)}\left(M\right), \varphi\left(M\right)\right|_{A_pD_p} = \underline{\varphi}^{(p)}\left(M\right),\\ \psi\left(M\right)\left|_{A_pB_p} = \psi_*^{(p)}\left(M\right), \psi\left(M\right)\right|_{C_pD_p} = \psi^{*(p)}\left(M\right).\end{gathered} \tag{3}$$

Тут $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі; M – біжуча точка відповідної кривої; функції $\bar{\varphi}^{(p)}\left(M\right),\ \underline{\varphi}^{(p)}\left(M\right),\ \psi_*^{(p)}\left(M\right),\ \psi^{*(p)}\left(M\right)$

та повна витрата $Q^{(p)}$ – одержуються в результаті фізичних замірів; коефіцієнт $\sigma(x,y)$ представляємо або у вигляді єдиного для даної області аналітичного виразу (многочлена $\sigma(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{r=0}^{k}\alpha_{k-r,r}x^{k-r}y^{r}$ чи тригонометричного многочлена $\sigma(x,y) = = \sum\limits_{k=0}^{m-1}\sum\limits_{r=0}^{n-1}\lambda_{k,r}\left(a_{k,r}\cos kx\cos ry + b_{k,r}\cos kx\sin ry + c_{k,r}\sin kx\cos ry + \right.$ $\left. + d_{k,r}\sin kx\sin ry\right)$, де $\alpha_{k,r}$, $a_{k,r}$, $b_{k,r}$, $c_{k,r}$, $d_{k,r}$, – шукані параметри; $\lambda_{k,r} = 0.25,\ \ k = r = 0$, $\lambda_{k,r} = 0.5,\ \ k = 0 \wedge r > 0 \vee k > 0 \wedge r = 0$, $\lambda_{k,r} = 1,\ \ k,r > 0$), або «покусково» (як це зображено на рис. 1, за відповідних умов спряження), або ж, коли деякі із однорідних ділянок збурюються функціями виду $\tilde{\sigma}(x,y) = \alpha(x-\bar{x})^{2\bar{l}}(y-\bar{y})^{2\bar{l}}$. При

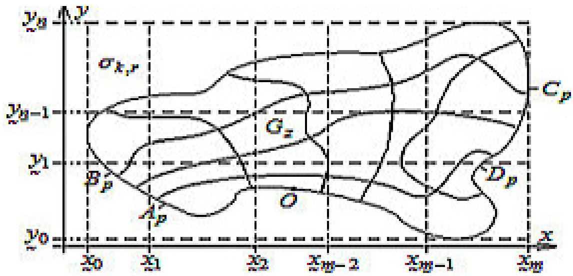


Рис. 1: Фізична область

побудові алгоритмів розв'язання прямих задач та задачі ідентифікації використані ідеї, закладені у роботах [1 – 4].

На відповідному фільтраційному фоні розглядається усереднена вздовж ліній течії обернена модельна сингулярно збурена задача однокомпонентного конвективно-адсорбційно-дифузійного масопере-носу в двопористому середовищі [5, 6]:

$$\sigma_1\tfrac{\partial c}{\partial t} = \varepsilon a(t)\tfrac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v(x)\frac{\partial c}{\partial x} - \varepsilon b(t)\left(\tfrac{\partial q}{\partial r}\right)\Big|_{r=R}; \tag{4}$$

$$\sigma_2\frac{\partial q}{\partial t} = \varepsilon a^*(t)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial q}{\partial r}\right); \tag{5}$$

$$c(x,0) = c_0^0(x),\ c(0,t) = c_*(t),\ \ c_x(x,t)|_{x=l} = 0,$$

$$q(x,r,0) = q_0^0(x,r), q(x,R,t) = k(t)\cdot c(x,t)\,,\ q_r(x,r,t)|_{r=0} = 0; \tag{6}$$

$$b(t)\int\limits_0^l q(x,R,t)dx = D_*^*(t), k(t)\int\limits_0^l c(x,t)dx = K_*^*(t), k(t)\int\limits_0^l c(x,t)dx =$$

$$= K_*^*(t), a(t)\left.\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = c_*^*(t),\ a^*(x,t)\left.\tfrac{\partial q(x,r,t)}{\partial r}\right|_{r=R} = q_*^*(x,t), \quad (7)$$

де $c\,(x,t)$, $q\,(x,r,t)$ – концентрації речовини відповідно в міжчастинковому просторі та в самих частинках, l – товщина середовища, R – радіус частинки, $v(x)$ – швидкість конвективного перенесення, $b(t)$ та $k(t)$ – невідомі функції впливу внутрішньо-частинкового дифузійного переносу на міжчастинковий та адсорбційної рівноваги відповідно, функції $a(t)$ та $a^*(x,t)$, які є достатньо гладкими та обмеженими функціями [5], відповідно характеризують швидкість протікання процесів дифузійного масоперенесення в міжчастинковому просторі та в порах частинок і знаходяться з умов перевизначення (7), $c_*^*(t)$, $q_*^*(x,t)$, $D_*^*(t)$, $K_*^*(t)$ – функції, що характеризують масовий розподіл речовини з часом (входять в умови перевизначення і знаходяться експериментально), σ_1, σ_2 – коефіцієнти пористості відповідно макро- та мікросередовища. На основі результатів, отриманих авторами в роботі [5], побудовано асимптотичне наближення розв'язків наведеної вище задачі.

[1] Somersalo E. Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography / E. Somersalo, M. Cheney, D. Isaacson // SIAM J. Appl. Math. – Philadelphia : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. – Vol. 52, № 4. – P. 1023–1040.

[2] Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярощак. – Рівне : НУВГП, 2013. – 415 с.

[3] Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К. : Наукова думка, 2007. – 308с.

[4] Бомба А. Я. Числовий метод квазіконформного відображення розв'язання задач ідентифікації коефіцієнта електричної провідності за даними томографії прикладених потенціалів / Л. Л. Крока, А. Я. Бомба // Волинський мате-матичний вісник. Серія прикладна математика. – Рівне : РДГУ, 2014. – Вип. 11 (20) – С. 24-33.

[5] Бомба А.Я. Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах: монографія / А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк. – Рівне: О.Зень, 2017. – 291с.

[6] Sergienko I. V. Highly Efficient Methods of the Identification of Competitive Diffusion Parameters in Inhomogeneous Media of Nanoporous Particles / I.V. Sergienko, M.R. Petryk, J. Fraissard, S. Leclerc // Cybernetics and System Analysis. – 2015. – Vol. 51. – № 4. – C. 529–546.

Дмитро Гоян [1], *Інесса Краснокутська* [2]

Система автоматизації обліку шведсько-українського медичного центру "Angelholm"

[1] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: hoyand@live.com
[2] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: i.krasnokutska@chnu.edu.ua

Характеристикою сучасного суспільства є проникнення провідних інформаційних технологій в усі галузі людської діяльності. Медична галузь також розвивається і на стику медицини та інформаційних технологій виникають питання автоматизації роботи лікарень, аптек, діагностичних центрів та інших медичних установ.

Дослідження медичних інформаційних технологій є одним із ключових завдань медичної інформатики [1]. З одного боку, медичні інформаційні технології можна визначити як такі, що використовуються для обробки інформації з використанням як апаратного, так і програмного забезпечення для збереження, спільного доступу та пошуку даних з метою покращення комунікації та прийняття рішень. З іншого боку, медичні інформаційні технології можна визначити як знання, навики та інструменти, що дозволяють збирати, керувати, поширювати та використовувати інформацію для підтримки надання медичної допомоги та покращення рівня здоров'я населення.

Для забезпечення виконання поставленої задачі був проведений аналіз засобів програмування і для реалізації вибрані наступні технології, які останнім часом стали досить популярними. При написанні програмного проекту використано скриптову мову програмування Groovy. Вона розроблена для платформи Java і є більш високорівневою мовою програмування порівняно з Java, розробка на ній зазвичай відбувається швидше за рахунок динамічної природи мови та елементів функціонального програмування [3]. В якості основи системи взято фреймворк Grails – високо-продуктивний програмний каркас для створення веб-додатків для платформи Java, створений під сильним впливом широко відомого Ruby on Rails і заснований на аріхтектурному шаблоні проектування програмного забезпечення MVC (Модель – Представлення – Контролер). Для розміщення даних вибрана система керування реляційними базами даних MySQL, що широко використовується для створення динамічних веб-сторінок і підтримується багатьма мовами програмування. Комунікація між проектом та базою даних виконана за допомогою інструменту Hibernate, що призначений для розв'язування задач об'єктно-реляційного відображення. Для генерації PDF-заключень використовується Java-бібліотека JasperReports, що генерує звіти на основі XML-шаблонів. Для створення користувацького інтерфейсу використовується фреймворк ZK, розмітка знаходиться у zul-файлах, що інтерпретуються в html. За захист відповідає фреймворк Spring Security, що надає механізми побудови систем аутентифікації та авторизації в Java-додатках. Всі вище перелічені інструменти підключаються до проекту як плагіни.

Програмне забезпечення, спроектоване та розроблене в процесі дослідження, пройшло етап тестування та впроваджене в шведсько-українському медичному центрі Angelholm і наразі успішно виконує свої функції.

Програма медичного контролю формує єдину базу всіх пацієнтів, що звертаються на огляд або діагностику. Медичне керування включає в себе попередній запис до будь-якого лікаря або в діагностичний кабінет. Автоматизоване ведення справ містить журнал медичного обліку. Система медичної реєстрації містить всі обстеження даного пацієнта та результати консультативних прийомів.

Відповідно до потреб клініки в проекті реалізовані розділи роботи з календарем, сумісної роботи з DICOM-сервером, формування заключень та протоколів обстежень, друком етикеток та дисків, чергою пацієнтів.

Керування прийняттям рішень в медицині, використання програм медичного обліку, автоматизація роботи лікарів в лікувальних та діагностичних медичних закладах – все це не лише дуже зручно, а і є показником рівня медичного закладу, що формує відношення пацієнтів та думку інших колаборуючих організацій.

[1] Hersh William *Medical informatics: improving health care through information* // The Journal of the American Medical Association. – 2002 – 288(16). – P. 1955–1958 http://dx.doi.org/10.1001/jama.288.16.1955

[2] Koenig Dierk, King Paul *Groovy in Action.* – Manning Publications, 2015. – 912 p.

Андрій Громик [1], *Іван Конет* [2]

Гіперболічні крайові задачі в обмежених кусково-однорідних циліндрично-кругових областях

[1] *Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам'янець-Подільський, Україна*
E-mail: gapon74@mail.ru
[2] *Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, Україна*
E-mail: konet51@ukr.net

Розглядається задача побудови обмеженого на множині $D = \{(t, r, \varphi, z)|t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup\limits_{j=1}^{n+1} I_j = \bigcup\limits_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j) : \varphi \in [0; 2\pi); z \in (-l_1; l_2); l_1 \le 0; l_2 \ge 0; |l_1| + l_2 \ne 0\}$ 2π-періодичного щодо кутової змінної φ класичного розв'язку диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [1]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \Delta_j u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z) : r \in I_j; j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j\Big|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z);\ r \in I_j;\ j = \overline{1, n+1},$$

відповідними крайовими умовами та умовами спряження [2]

$$\Big[\Big(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\Big) u_k - \Big(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\Big) u_{k+1}\Big]\Big|_{r=R_k} = 0;\ j = 1, 2;\ k = \overline{1, n},$$

де

$$\Delta_j = a_{rj}^2 \Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– оператор Лапласа для ортотропного середовища в циліндричній системі координат;
a_{rj}, $a_{\varphi j}$, a_{zj}, χ_j, α_{js}^k, β_{js}^k – деякі сталі;
f_j, g_j^1, g_j^2 – задані двічі неперервно диференційовні функції;

$u(t,r,\varphi,z) = \{u_1(t,r,\varphi,z), u_2(t,r,\varphi,z), ..., u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$ – шукана двічі неперервно диференційовна функція.

Щодо проміжку I_n^+ розглянуто 4 канонічні випадки:

1) $R_0 = 0$, $R_{n+1} = +\infty$ (шар);
2) $R_0 > 0$, $R_{n+1} = +\infty$ (шар з циліндричною порожниною);
3) $R_0 = 0$, $R_{n+1} \equiv R < +\infty$ (суцільний циліндр);
4) $R_0 > 0$, $R_{n+1} \equiv R < +\infty$ (порожнистий циліндр).

Інтегральне зображення єдиних точних аналітичних розв'язків досліджуваних гіперболічних початково-крайових задач спряження одержано в замкнутій формі методом інтегральних та гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна). У всіх 4 випадках щодо кутової змінної φ застосовується скінченне інтегральне перетворення Фур'є на проміжку $[0; 2\pi)$, щодо змінної z – скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому проміжку $(-l_1; l_2)$. У випадку 1 щодо радіальної змінної r застосовується гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є-Бесселя, у випадку 2 – гібридне інтегральне перетворення типу Вебера, у випадку 3 – скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 1-го роду, у випадку 4 – скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 2-го роду.

Побудовані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задач й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків коливних процесів у кусково-однорідних середовищах.

[1] Самойленко В.Г., Конет І.М. *Рівняння математичної фізики.* – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2014. – 283 с.

[2] Конет І.М. *Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах.* – Кам'янець-Подільський: Видавництво Абетка-Світ, 2013. – 120 с.

Іван Данилюк

Підвищення продуктивності апаратної конфігурації комп'ютера для веб-розробника

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: i_danylyuk@yahoo.com

Для підвищення продуктивності свого комп'ютера розробник-початківець збільшує в першу чергу об'єм оперативної пам'яті, оскільки комп'ютер для нього – це засіб для виробництва і працювати повинен максимально надійно і швидко. Через деякий час змінює HDD (як слабку ланку) на SSD. Потім приходить до думки поміняти процесор на продуктивніший або комп'ютер на сучасніший. Установка ж робочого комплекту програм відбувається на енергонезалежний носій, наприклад на SSD. Якщо звернути увагу на розробку будь-якого сайту, скільки запитів відбувається до бази даних або інших робочих файлів на тому ж носії і скільки на це йде часу, то виникає думка – а чому б ці дані не розмістити на ще швидшому носії?

Проте, пройшовши вище описаний шлях користувача, можна утриматися від покупки сучасного комп'ютера і спробувати провести деяку неочевидну оптимізацію вже наявного комп'ютера, яка пришвидшить роботу потрібних програм, а в цілому прискорить і час створення програмного продукту. Одним із варіантів для суттєвого пришвидшення роботи додатків є використання оперативної пам'яті в якості віртуального RAM-диска [1, 2]. Справді, суб'єктивно всі вищевказані програми і браузер з десятками відкритих вкладок реагують на натискання мишки досить швидко, майже миттєво. Але і тут є свої особливості. Розглянемо їх детальніше.

Відомо, що швидкість зчитування і запису в оперативну пам'ять на порядок вища, ніж у найшвидших SSD. Теоретично все повинно працювати миттєво. Однак це не зовсім так. Це твердження має відношення лише до тих процесів, які вимагають читання і запису великих обсягів даних, наприклад растрової графіки. Якщо таких немає, то в кінцевому підсумку все обмежується потужністю процесора комп'ютера і навіть найшвидші пристрої збереження даних відходять на другий план. І саме тому для веб-розробки все виглядає трохи інакше.

RAM-диск – це в принципі такий же диск, як і всі інші на комп'ютері, з тією лише різницею, що він енергозалежний і забирає частину оперативної пам'яті комп'ютера. Відповідно, потрібно виключити ситуацію несподіваного відключення живлення комп'ютера. Це або джерело безперебійного живлення, або ноутбук.

Так навіщо ж розміщувати основні програми для веб-розробки в енергозалежній оперативній пам'яті з ризиком втрати даних в той час, коли швидкісні SSD вже досить поширені і привабливі за ціною? Відповідь доволі проста, але і не зовсім очевидна для звичного користувача, незнайомого з архітектурою комп'ютера.

SSD-диски дійсно набагато швидші за HDD [3], але не на стільки, щоб зрівнятися з оперативною пам'яттю. На сьогоднішній день оперативна пам'ять є найшвидшим носієм даних. Вона в рази перевищує швидкості запису і читання на SSD, і так само з кожним роком стає доступнішою за ціною.

Крім того SSD-диски будуються на основі флеш-пам'яті. А основною вродженою проблемою флеш-пам'яті є її зношування в міру використання. Також проблемою є те, що з еволюційним розвитком нових технологічних процесів виробництва пам'яті NAND ресурс чіпів скорочується, чого більшість розробників SSD намагаються не афішувати.

Комірки пам'яті NAND SSD об'єднані в сторінки, а ті – в блоки. Працювати з кожною коміркою окремо не можна, дані стираються цілими блоками. У міру заповнення диска, порожніх сторінок і блоків під запис стає все менше. У результаті команда запису, отримана контролером SSD, призводить до виникнення кількох циклів Program/Erase: дані блоку треба записати в нові комірки, а "сміття", що залишилось – видалити, повернувши таким чином блок у вільне адресне поле. Таким чином, обсяг даних, записаних на носій, завжди більший, ніж їх фактичне оновлення, яке ОС передає контролеру SSD. Цей ефект посилення запису (write amplification) прискорює зношування комірок. А чим повніший диск – тим менше залишається простору для маневру, більше переносів даних і повільніший запис.

Власникам ПК немає особливих причин турбуватися за раннє вироблення ресурсу SSD – в персональних додатках не ті режими роботи накопичувачів. А ось у серверах все інакше [4, 5]. Їхні клієнти і додатки породжують інтенсивні потоки запитів до дисків. Має значення шаблон навантаження (load pattern) і програмне забезпечення. Наприклад, для баз даних на фізичному сервері типовим вважається співвідношення 70/30 (%) операцій читання/запису з випадковим доступом до дисків. У віртуальному сервері пропорція може бути зовсім протилежною, наприклад 20/80. Тому SSD і витіснили HDD в критичних до продуктивності завданнях. Багато пропозицій хостингу сьогодні будуються вже на SSD. Але витривалість флеш-пам'яті обмежена. Очікувана тривалість життя SSD з його типом комірок, контролером, прошивками, процедурами і внутрішніми лічильниками, залежить від кількості циклів P/E (program/erase - послідовностей запису, стирання і повторного запису), які диск здатний перенести.

Незворотність зношування комірок флеш-пам'яті NAND – ще не вирок для SSD. Його термін роботи залежить від моделі навантажень. Ця обставина вносить деяку невизначеність в проектування підсистем зберігання і утримує від сліпого вибору. Кількісна оцінка ресурсу накопичувачів (endurance) в певному шаблоні роботи – такий же важливий параметр для серверних SSD, як і ємність, продуктивність і ціна за гігабайт. Тому для веб-розробника актуальним є зменшення навантаження на SSD-диск у плані зменшення операцій запису.

Таким чином, пропонована модель вдосконалення комп'ютера для веб-розробки передбачає виконання послідовності кількох простих кроків. По-перше, потрібно на комп'ютері створити RAM-диск. По-друге, необхідно інсталювати на нього браузер, набір програм локального сервера і на завершення – потрібну CMS або власний код.

Така схема однаково добре підходить як для користувачів Linux, так і Windows. Для Linux створення RAM-диску можливе з використанням файлових систем tmpfs (у віртуальній пам'яті) та ramfs (на основі тільки реальної оперативної пам'яті). Для Windows дуже хорошим open-source варіантом для створення віртуального RAM-диска буде використання ImDisk Virtual Disk Driver. Крім можливості створення диска практично "необмеженого" розміру в оперативній пам'яті, можна також скористатися функціями резервного збереження / відновлення на енергонезалежний носій. Як варіант можна використовувати ERAM, або AMD Radeon RAMDisk з деякими обмеженнями на розмір RAM-диска.

У деяких випадках використання RAM-диска не завжди приводить до суттєвого скорочення часових затрат в інтерфейсі сучасних CMS, навіть якщо на диску розмістити і браузер, і локальний сервер, і CMS. Для комп'ютерів з дуже слабким процесором іноді достатньо і HDD. Від рівня продуктивності залежить час генерації сторінок в інтерфейсі, і заміна процесора на потужніший підтверджує це.

В цілому суб'єктивно апгрейд комп'ютера з HDD на SSD користувачем відчувається відразу. І тут важливо згадати, що причиною цього є не тільки швидкість читання, а й час доступу до даних – у SSD він становить 0.22 мс проти 16.76 у HDD. Наступний крок до прискорення – перенесення деяких професійних програм або їх кешів з SSD на RAM-диск. Він помітний у разі веб-розробки та досить відчутний, якщо доводиться працювати, наприклад, з графікою. І ось в цьому випадку час доступу (у RAM-диска 0.01 мс проти 0.22 у SSD) відступає вже на другий план у порівнянні зі швидкістю (наприклад, читання у RAM-диска 10000 MB/s проти 450 у SSD). Оскільки веб-розробнику в роботі доводиться використовувати кілька програм одночасно, плюс браузер з десятками відкритих вкладок, і між програмами доводиться постійно перемикатися, то останній варіант прискорення комп'ютера є досить істотним і відчутним. Крім того зменшується зношування системного SSD-диску.

Отже, швидкий комп'ютер для веб-розробника – це перш за все: комп'ютер з продуктивним процесором; RAM диск для тимчасових файлів, кешів і можливо баз даних; SSD для системи і робочих програм; HDD для ємних файлів на зразок архівів, бекапів, фото, відео і т.д.

[1] *RAM Disks Explained: What They Are and Why You Probably Shouldn't Use One.* – Режим доступу: https://www.howtogeek.com/171432/ram-disks-explained-what-they-are-and-why-you-probably-shouldnt-use-one/

[2] *How to Create a 10 GB/s RAM Disk in Windows.* – Режим доступу: https://www.tekrevue.com/tip/create-10-gbs-ram-disk-windows/

[3] *SSD vs. HDD: What's the Difference?* – Режим доступу: http://www.pcmag.com/article2/0,2817,2404258,00.asp

[4] *SSD в серверах и некоторые принципы.* – Режим доступу: http://ko.com.ua/ssd_v_serverah_i_nekotorye_principy_117675

[5] *Обоснование необходимости приобретения SSD для разработчиков.* – Режим доступу: https://habrahabr.ru/post/188360/

В'ячеслав Євтухов, Діана Костіна

Асимптотика розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,
Одеса, Україна
E-mail: emden@farlep.net, dianakkk@rambler.ru

Розглядається диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \varphi_i(y), \tag{1}$$

де $\alpha_i \in \{-1, 1\}$, $p_i [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$- неперервна функція, $i = 1, \ldots, m$, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ при $i \in \{1, \ldots, l\}$ неперервна і правильно змінна (див. [1]) функція порядку σ_i коли $y \to Y_0$, а при $i \in \{l+1, \ldots, m\}$ – двічі неперервно диференційовна і задовольняє умови

$$\varphi_i'(y) \neq 0, \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \end{array} \right. \quad \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{\varphi'^2(y)} = 1, \tag{2}$$

Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, Δ_{Y_0}– однобічний окіл Y_0.

В силу умов (2) кожна з функцій φ_i при $i \in \{l+1, m\}$ є (див. [2]) швидко змінною при $y \to Y_0$.

Розв'язок y рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0)$ – розв'язком, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ і задовольняє наступні умови

$$y(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0.$$

При $l < m$ і $k \in \{l+1, \ldots, m\}$ досліджується питання про існування та асимптотику $P_\omega(Y_0)$ – розв'язків рівняння (1), для кожного з яких

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_k(t)\varphi_k(y(t))} = 0 \quad \text{при} \quad i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\}, \tag{3}$$

тобто, коли на кожному такому розв'язку головним у правій частині рівняння (1) є доданок з швидко змінною при $y \to Y_0$ нелінійністю φ_k.

Оберемо $b \in \Delta_{Y_0}$ таким чином, щоб виконувались нерівності

$$b > 1 \quad (b < -1) \quad \text{при} \quad Y_0 = +\infty \quad (Y_0 =_\infty), \quad |b| < 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0$$

і введемо для кожного $i \in \{1, \dots, m\}$ допоміжні функції

$$\Phi_i(y) = \int\limits_{B_i}^{y} \frac{ds}{\varphi_i(s)}, \quad I_i(t) = \int\limits_{A_i}^{t} p_i(\tau)\, d\tau,$$

де

$$B_i = \begin{cases} b, & \text{якщо} \quad \int\limits_b^{Y_0} \frac{ds}{\varphi_i(s)} = \pm\infty, \\ Y_0, & \text{якщо} \quad \int\limits_b^{Y_0} \frac{ds}{\varphi_i(s)} = \text{const}, \end{cases}$$

$$A_i = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^{\omega} p_i(\tau)\, d\tau = +\infty, \\ \omega, & \text{якщо} \quad \int\limits_a^{\omega} p_i(\tau)\, d\tau < +\infty. \end{cases}$$

Для рівняння (1) одержано наступний результат.

Теорема 1 *Нехай $l < m$, $k \in \{l+1, \dots, m\}$ і*

$$\limsup_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \left| \frac{\varphi_k(y)\varphi'_j(y)}{\varphi'_k(y)\varphi_j(y)} \right| < +\infty \quad \textit{при} \quad j \in \{l+1, \dots, m\} \setminus \{k\}.$$

Тоді для існування в рівняння (1) $P_\omega(Y_0)$– розв'язків, що задовольняють умови (3), необхідно і досить, щоб

$$\alpha_k \mu_k I_k(t) < 0 \quad \textit{при} \quad t \in]a, \omega[,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i\left(\Phi_k^{-1}\left(\alpha_k I_k(t)\right)\right)}{p_k(t)\varphi_k\left(\Phi_k^{-1}\left(\alpha_k I_k(t)\right)\right)} = 0 \quad \textit{при} \quad i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k\},$$

де $\mu_k = \operatorname{sign} \varphi'_{\mathrm{k}}(\mathrm{y})$ і Φ_k^{-1} – функція, що обернена до Φ_k. Крім того, для кожного такого розв'язку має місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичне зображення

$$y(t) = \Phi_k^{-1}\left(\alpha_k I_k(t)\right) + \frac{\varphi_k\left(\Phi_k^{-1}\left(\alpha_k I_k(t)\right)\right)}{\varphi'_k\left(\Phi_k^{-1}\left(\alpha_k I_k(t)\right)\right)} o(1).$$

[1] Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции.* – Москва: Нвука, 1985. – 141 с.

[2] Bingham N.M., Goldie C.M., Teugels J.L. *Regular Variation.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1987. – 494 p.

Роман Заторський

Параперманенти та рекурентні дроби

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ, Україна
E-mail: romazatorsky@gmail.com

Функції таблиць з елементами із деякого числового поля виявилися важливим апаратом для моделювання різноманітних процесів та задач. Такими функціями квадратних, прямокутних та трикутних таблиць (матриць) є детермінанти, перманенти [1] та пфаффіани (див. [2], стор. 239-240.).

Різновидом функцій трикутних таблиць елементів деякого числового поля є парадетермінанти та параперманенти [3]. Парадетермінанти та параперманенти трикутних таблиць $n-$го порядку також є полілінійними многочленами від коефіцієнтів цих матриць, проте із $\frac{n(n+1)}{2}$ змінними та 2^{n-1} доданками.

Підсумовування доданків у парадетермінанті проводиться за $\Xi(n)$-множиною (див. [3], стор. 29–35) спеціальних мультимножин, які бієктивно пов'язані із впорядкованими розбиттями натурального числа n на натуральні доданки. Завдяки цьому парадетермінанти виявилися добре пристосованими до аналізу задач, в яких з'являються лінійні рекурентні співвідношення [4] та розбиття.

Дамо означення цих функцій.

Нехай K — деяке числове поле. Трикутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{1}$$

чисел із числового поля K назвемо трикутною матрицею.

Парадетермінантом та параперманентом трикутної матриці (1) назвемо числа, що задаються відповідно рівностями:

$$ddet(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

$$pper(A) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

де підсумовування проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння $p_1 + \ldots + p_r = n$, а $\{a_{ij}\} = \prod_{k=j}^{i} a_{ik}$.

Слід також відзначити плідний взаємозв'язок між детермінантами та парадетермінантами, який допомагає виявити нові властивості обох функцій. Наприклад, за допомогою парадетермінантів отримано один із розв'язків відомої проблеми Пойа про знакову конвертацію матриць.

Параперманенти трикутних матриць спеціальної структури узагальнюють континуанти [5] та є хорошим інструментом для узагальнення ланцюгових дробів.

Важливими критеріями узагальнення неперервних дробів є:

1) побудова зручної в користуванні алгебраїчної конструкції, зовнішній вигляд якої містив би максимум інформації про її властивості, був би близьким до зображення неперервних дробів та дозволяв би виділити клас періодичних конструкцій, які б узагальнювали періодичні неперервні дроби;

2) алгоритм обчислення значень раціональних вкорочень цих математичних об'єктів повинен бути простим в реалізації та відзначатися невеликою складністю за кількістю операцій;

3) довільні періодичні конструкції вищих порядків повинні слугувати зображеннями ірраціональностей вищих порядків.

Зобразимо неперервний дріб

$$q_1 + \cfrac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \frac{p_4}{q_4 + \ldots + \frac{p_m}{q_m + \ldots}}}}$$

у вигляді рекурентного дробу другого порядку

$$\left[\begin{array}{c|cccccc} q_1 & & & & & & \\ \frac{p_2}{q_2} & q_2 & & & & & \\ 0 & \frac{p_3}{q_3} & q_3 & & & & \\ 0 & 0 & \frac{p_4}{q_4} & q_4 & & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_m}{q_m} & & \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{array}\right]_{\infty} \tag{2}$$

Рекурентний дріб (2) є часткою двох параперманентів нескінченного порядку.

Для побудови рекурентного дробу третього порядку достатньо у відповідних трикутних матрицях долучити третю ненульову піддіагональ.

Наведемо теорему про зв'язок одноперіодичних рекурентних дробів n-го порядку із коренями алгебраїчного рівняння n-го порядку [3].

Теорема 2 *Якщо для $(m+1)-$го раціонального вкорочення $1-$періодичного рекурентного дробу $n-$го порядку*

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_1 & & & & & & & \\
\frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & & \\
\vdots & \dots & \ddots & & & & & \\
\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \dots & a_1 & & & & \\
\frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \dots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\
0 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \dots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\
0 & 0 & \dots & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \dots & a_1
\end{array}\right]_{m+1}$$

існує скінченна не нульова границя при $m \to \infty$, то такий рекурентний дріб $n-$того порядку є зображенням дійсного кореня алгебраїчного рівняння

$$x^n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

з ненульовим вільним членом, модуль якого більший за модулі всіх інших коренів цього рівняння.

[1] *Минк Х.* Перманенты. Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 213 с.

[2] *Татт У.* Теория графов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 424 с.

[3] *Заторський Р.* Числення трикутних матриць та його застосування. – Івано-Франківськ: "Сімик", 2010. – 508 с.

[4] *Goy T., Zatorsky R.* Infinite Linear Recurrence Relations and Superposition of Linear Recurrence Equations // Journal of Integer Sequences, Vol. 20 (2017), Article 17.5.3, pages 14.

[5] *Грехем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. – М.: Мир, 1998. – 704 с.

Іван Клевчук

Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-функціональних рівнянь

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: klevchuk@yandex.ru

В сучасних задачах природознавства часто доводиться досліджувати асимптотичну поведінку розв'язків різних класів диференціальних рівнянь. Метою досліджень даної роботи є розвиток методу інтегральних многовидів та асимптотичних методів для параболічних і гіперболічних рівнянь з перетвореним аргументом та диференціально-різницевих рівнянь, дослідження на основі зазначених методів змістовних біфуркаційних задач [1, 2].

Розглядається рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon \left[(\gamma + i\delta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta) u \right] + (d_0 + ic_0) u^2 \overline{u} \tag{1}$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{2}$$

де ε – малий додатний параметр.

Теорема 3 *Нехай $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1), (2) має періодичні відносно t розв'язки*

$$u_n = u_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon} r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon) t + nx)) + O(\varepsilon),$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)\,|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ці розв'язки експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова $(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2 (\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2$ при всіх $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

Цей метод можна застосувати до дослідження періодичних режимів рівняння спінового горіння

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\xi = 2\varepsilon\left[\frac{\partial\xi}{\partial t}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2\right)+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^3\xi}{\partial t\partial x^2}\right],\ \xi(t,x+2\pi)=\xi(t,x), \tag{3}$$

де ε – малий додатний параметр, $\varrho > 0$. Біжучі хвилі задачі (3) мають вигляд $\xi_n(t,x) = \sqrt{1-\frac{n^2}{\varrho^2}}\cos(t+nx)+O(\varepsilon)$, де $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 < \varrho^2$. Біжучі хвилі $\xi_n(t,x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \frac{1}{6}(2\varrho^2+1)$.

Розглянемо рівняння спінового горіння із запізненням

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\xi = 2\varepsilon\left[\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^3\xi}{\partial t\partial x^2}+F(\xi,\frac{\partial\xi}{\partial t},\xi(t-\Delta,x),\frac{\partial\xi}{\partial t}(t-\Delta,x))\right], \tag{4}$$

$$\xi(t,x+2\pi)=\xi(t,x), \tag{5}$$

де ε – малий додатний параметр, $\Delta > 0$, $\varrho > 0$, причому F – однорідний многочлен третього степеня, тобто $F(a\xi, ap, a\eta, a\zeta) = a^3F(\xi,p,\eta,\zeta)$, $a \in \mathbb{R}$.

Правильне наступне твердження.

Теорема 4 *Нехай $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $n^2 < \varrho^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (4), (5) має періодичні відносно t розв'язки*

$$\xi_n = \sqrt{\left(1-\frac{n^2}{\varrho^2}\right)|d_0|^{-1}}\cos(t+nx)+O(\varepsilon),$$

де $n \in \mathbb{Z}$.

Дослідимо стійкість періодичних режимів рівняння спінового горіння із запізненням.

Теорема 5 *Біжучі хвилі $\xi_n(t,x)$ задачі (4), (5) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\left(\frac{k^2}{\varrho^2}+1-\frac{n^2}{\varrho^2}\right)^2\left(\frac{k^2}{\varrho^2}+2-\frac{6n^2}{\varrho^2}\right) > \frac{4c_0^2n^2}{\varrho^2d_0^2}\left(1-\frac{n^2}{\varrho^2}\right)^2$$

при всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Теорему 1 можна застосувати до дослідження біфуркації циклів параболічної системи із запізненням

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L(\varepsilon) u_t + f(u_t, \varepsilon) \tag{6}$$

та періодичною умовою (2). Тут ε – малий додатний параметр, $L(\varepsilon) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^m$ – лінійний неперервний оператор, $f : \mathbb{C} \times [0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^m$, $f(\varphi, \varepsilon) = O(||\varphi||^2)$ при $||\varphi|| \to 0$, оператор f чотири рази неперервно диференційовний відносно своїх аргументів, $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\Delta, 0]$ – простір неперервних функцій із значеннями в $\mathbb{R}^m$ із нормою $||\varphi|| = \sup\limits_{-\Delta \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|$, u_t – елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $u_t(\theta, x) = u(t+\theta, x)$, $-\Delta \le \theta \le 0$. Припускається, що нульовий розв'язок системи (6) при $\varepsilon = 0$ асимптотично стійкий. Накладено умови на матрицю D та оператор $L(\varepsilon)$.

Для дослідження коливань брюсселятора із малою дифузією розглянемо систему

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = A - (B+1)u_1 + u_1^2 u_2 + \varepsilon d_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = B u_1 - u_1^2 u_2 + \varepsilon d_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

з періодичною умовою

$$u_1(t, x + 2\pi) = u_1(t, x), \quad u_2(t, x + 2\pi) = u_2(t, x),$$

де $B = 1 + A^2 + \varepsilon$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, ε – малий додатний параметр.

[1] Klevchuk I.I. *Existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument* // Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – **215**, № 3. – P. 341 – 349.

[2] Клевчук І.І. *Біфуркація автоколивань параболічних систем із аргументом, що запізнюється, та малою дифузією* // Нелінійні коливання. – 2016. – **19**, № 3. – С. 390 – 398.

Петро Костробій [1], Богдан Маркович [1], Олександра Візнович [1], Михайло Токарчук [1,2]

Узагальнені рівняння електродифузії з просторово-часовою фрактальністю

[1] *Національний університет «Львівська поілтехніка», Львів, Україна*
E-mail: petro.kostrobi@gmail.com
[2] *Інститут фізики конденсованих систем НАН України, Львів, Україна*
E-mail: mtok2010@ukr.net

На основі підходу [1] були отримані нові немарковські рівняння електродифузії іонів в просторово неоднорідному середовищі з фрактальною структурою. Використавши наближення для функцій пам'яті та апарат дробового числення [2, 3], отримано узагальнені рівняння електродифузії типу Кеттано з врахуванням просторово-часової фрактальності [4]:

$$\begin{aligned}\tau_a \frac{\partial^2}{\partial t^2} n_a(\vec{r};t) + \frac{\partial}{\partial t} n_a(\vec{r};t) = \\ = {}_0D_t^{1-\xi} \sum_b \int d\mu_\alpha(\vec{r}') \frac{\partial^\alpha}{\partial \vec{r}^\alpha} \cdot \overline{D}_q^{ab}(\vec{r},\vec{r}') \cdot \frac{\partial^\alpha}{\partial \vec{r}'^{\alpha}} \beta \nu_b^*(\vec{r}';t),\end{aligned} \quad (1)$$

де $n_a(\vec{r};t)$ — нерівноважні середні значення іонів сорту a в точці $\vec{r}$ у момент часу t, $\overline{D}_q^{ab}(\vec{r},\vec{r}')$ — просторово неоднорідний коефіцієнт взаємної дифузії іонів, ${}_0D_t^{1-\xi}$ — дробова похідна Рімана-Ліувілля по часу, $0<\xi\leqslant 1$, $\frac{\partial^\alpha}{\partial \vec{r}'^{\alpha}}$ — дробова похідна по координаті, $0<\alpha\leqslant 1$, τ_a — час релаксації іонних процесів у фрактальній структурі, β — обернена термодинамічна температура, $d\mu(x) = \frac{|x|^\alpha}{\Gamma(\alpha)}dx$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функція, $\nu_b^*(\vec{r}';t)$ — електрохімічний потенціал іонів сорту b.

Якщо у рівняннях (1) покласти $\alpha = 1$, тобто знехтувати просторовою фрактальністю і просторовою неоднорідністю, то отримаємо рівняння дифузії типу Кеттано [5, 6]:

$$\tau_a \frac{\partial^2}{\partial t^2} n_a(\vec{r};t) + \frac{\partial}{\partial t} n_a(\vec{r};t) = {}_0D_t^{1-\xi} \sum_b \overline{D}^{ab} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} \nu_b^*(\vec{r};t). \quad (2)$$

Розглянуто різні моделі частотної залежності для функцій пам'яті, які приводять до відомих результатів типу рівнянь дифузії з просторово-часовою фрактальністю [7, 5, 6, 8, 9], а також їхніх узагальнень.

[1] Kostrobij P., Markovych B., Viznovych O., Tokarchuk M. *Generalized diffusion equation with fractional derivatives within Renyi statistics* // Journal of Mathematical Physics. – 2016. – **57**, 9. – P. 093301.

[2] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* – Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[3] Podlubny I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications.* – Academic Press, 1998.

[4] Костробій П. П., Маркович Б. М., Візнович О. В., Токарчук М. В. *Узагальнені рівняння електродифузії з просторово-часовою фрактальністю.* – Львів, 2017. – 21 с. (Препринт ICMP-17-03U).

[5] Compte A., Metzler A. *The generalized Cattaneo equation for the description of anomalous transport processes* // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1997. – **30**, 21. – P. 7277.

[6] Kosztołowicz T., Lewandowska K. D. *Hyperbolic subdiffusive impedance* // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2009. – **42**, 5. – P. 055004.

[7] Nigmatullin R. R. *The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry* // Physica status solidi (b). – 1986. – **133**, 1. – P. 425.

[8] Qi H., Jiang X. *Solutions of the space-time fractional Cattaneo diffusion equation* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2011. – **390**, 11. – P. 1876.

[9] Sun H., Chen W., Li C., Chen Y. *Fractional differential models for anomalous diffusion* // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2010. – **389**, 14. – P. 2719.

Наталія Мазуряк [1], Ярема Савула [2]

Числове розв'язування задач адвекції-дифузії у тонкому криволінійному каналі різномасштабним методом скінченних елементів

[1] *ЛНУ ім. Івана Франка, Львів, Україна*
E-mail: nata-ww@ukr.net
[2] *ЛНУ ім. Івана Франка, Львів, Україна*
E-mail: yarema.savula@lnu.edu.ua

Вступ. У процесі математичного моделювання сучасних науково-технічних проблем виникає необхідність у дослідженні процесів переносу субстанції у середовищах зі складною структурою. Відомо, що розв'язування задачі переносу числовими методами, зокрема методом скінченних елементів (МСЕ) [2], у випадку великих чисел Пекле сильно ускладнюється з огляду на нестійкість обчислювального процесу. У роботі [3] показано, що різномасштабний метод скінченних елементів (РМСЕ) є ефективним для розв'язування задач адвекції-дифузії у випадку великих чисел Пекле. У даній роботі РМСЕ застосовано до розв'язування задачі адвекції-дифузії у тонкому криволінійному каналі.

Формулювання задачі. Розглянемо тонкий криволінійний канал (рис. 2). Віднесемо його до криволінійної системи координат $\alpha_1\alpha_2$ таким чином: координата α_1 відповідає напряму дотичної до серединної кривої, координата α_2 - напряму нормалі. У введеній системі координат криволінійний канал Ω можна описати співвідношенням

$$\Omega = \{\alpha_1\alpha_2 : \alpha_1^b \le \alpha_1 \le \alpha_1^e, -h \le \alpha_2 \le h\}.$$

Позначимо через A коефіцієнт Ляме серединної кривої каналу, через K - кривизну кривої. Врахувавши той факт, що канал є тонким, розв'язок задачі шукатимемо у вигляді лінійного закону за змінною α_2

$$u(\tau, \alpha_1, \alpha_2) = u_1(\tau, \alpha_1) + \frac{\alpha_2}{h} u_2(\tau, \alpha_1), \tag{1}$$

де τ - час, $u_1(\tau,\alpha_1)$, $u_2(\tau,\alpha_1)$ - невідомі функції.

Таким чином, врахувавши (1) можемо записати задачу адвекції-дифузії в області Ω [3]:

$$\kappa\left(\frac{\partial u_1}{\partial\tau}+\frac{Kh}{3}\frac{\partial u_2}{\partial\tau}\right)+\frac{\kappa Pe}{A}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{\lambda}{A}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}-\frac{Kh}{3}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2h}\left(\int_{-h}^{h}f(1+\alpha_2K)d\alpha_2-(1+hK)q^{+}+(1-hK)q^{-}\right),$$

$$\frac{h}{3}\kappa\left(\frac{\partial u_2}{\partial\tau}+Kh\frac{\partial u_1}{\partial\tau}\right)+\frac{h}{3}\frac{\kappa Pe}{A}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-\frac{h}{3}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\frac{\lambda}{A}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-Kh\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}\right)+$$

$$+\frac{\lambda}{h}u_2=\frac{1}{2h}\left(\int_{-h}^{h}f(1+\alpha_2K)\alpha_2d\alpha_2-(1+hK)hq^{+}-(1-hK)hq^{-}\right),$$

$$u_1=0,u_2=0\text{ на }\alpha_1=\alpha_1^b,$$

$$u_1=0,u_2=0\text{ на }\alpha_1=\alpha_1^e,$$

$$u_1^{(0)}=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}u^{(0)}d\alpha_2,$$

$$u_2^{(0)}=\frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h}u^{(0)}(1+\alpha_2K)(\alpha_2-\frac{Kh^2}{3})d\alpha_2,$$

де Pe - число Пекле, τ - час, $\kappa=Const\geq 0,\lambda=Const\geq 0$ - задані коефіцієнти, $f(\alpha_1,\alpha_2)$, $q^{+}(\tau,\alpha_1,h)$, $q^{-}(\tau,\alpha_1,-h)$, $u^{(0)}(\alpha_1,\alpha_2)$ - відомі задані функції, $u_1^{(0)}=u_1(0,\alpha_1),u_2^{(0)}=u_2(0,\alpha_1)$.

Різномасштабний метод скінченних елементів. Головна ідея РМСЕ [1, 3] полягає в тому, що структура розв'язку відображається у локалізованих базисних функціях. Таким чином враховуються характеристики розв'язку, завдяки чому відбувається краща апроксимація за невеликої кількості скінченних елементів. Для забезпечення виконання цієї властивості різномасштабні базисні функції визначають окремо на кожному скінченному елементі за допомогою класичного методу скінченних елементів (МСЕ) з умови

$$L\varphi_i=0\text{ в }E_j,\varphi_i=\varphi_i^0\text{ на межі }E_j,i,j=1,..n,$$

де n - кількість скінченних елементів, E_j-j-й скінченний елемент, L - диференціальний оператор задачі, φ_i - різномасштабні базисні функції, φ_i^0 - лінійні базисні функції МСЕ.

Обчислювальний експеримент. Для прикладу розглянемо задачу стаціонарної адвекції-дифузії з переважаючою адвективною складовою у прямолінійному тонкому каналі (у цьому випадку A=1, K=0). Візьмемо наступні значення параметрів: $Pe = 100, \alpha_1^b = 0, \alpha_1^e = 1, h = 0.05, \kappa = 1, \lambda = 1, f = 1, q^+ = q^- = 0$. При таких значеннях параметрів відомим є аналітичний розв'язок для u_1. На рис. 3 наведено вигляд різномасштабної базисної функції. На рис. 4 наведено для порівняння розв'язок u_1, отриманий аналітично, та розв'язки u_1 і u_2, отримані класичним та різномасштабним МСЕ при розбитті відрізка на 10 скінченних елементів.

Висновки. Для розв'язування задачі адвекції-дифузії у тонкому каналі було застосовано класичний та різномасштабний МСЕ. З рис. 4 бачимо, що для достатньо великого числа Пекле розв'язок РМСЕ є стійким та збігається з аналітичним розв'язком, тоді як розв'язок класичним МСЕ містить неприродні осциляції. Отримані результати демонструють ефективність різномасштабного методу скінченних елементів.

[1] Y. Efendiev, T. Hou. *Multiscale finite element methods. Theory and application* // NY : Springer (Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences). – 2009. – **Vol**. 4. – C. 234.

[2] Савула Я. Г. *Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами.* – Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2004. – 221 с.

[3] Н. Сподар, Я. Савула *Застосування різномасштабного методу скінченних елементів до розв'язування одновимірної задачі адвекції-дифузії* // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – **Вип**. 19. – С. 190-197.

[4] В. Кухарський, Н. Кухарська, Я. Савула *Використання гетерогенних математичних моделей до розв'язування задач тепломасоперенесення в середовищах із тонкими неоднорідностями* // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – **Вип**. 4. – С. 132-141.

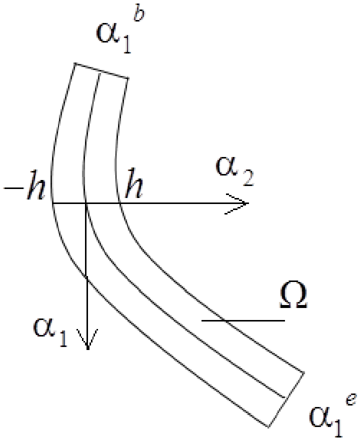


Рис. 2: Вигляд тонкого каналу

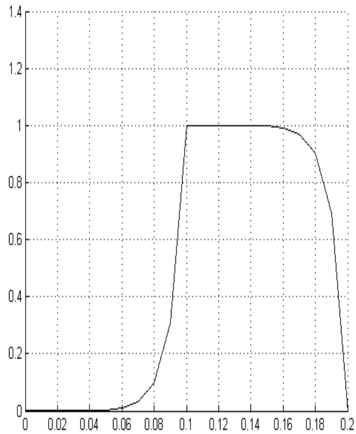


Рис. 3: Вигляд різномасштабної базисної функції

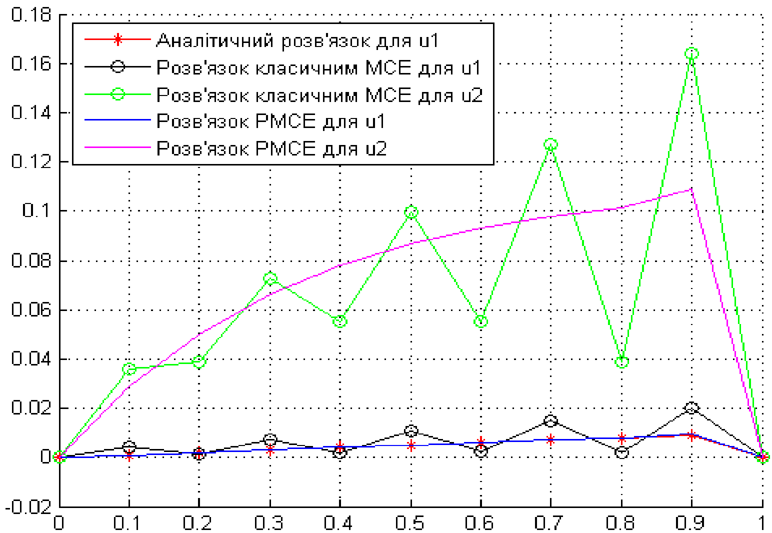


Рис. 4: Графічна ілюстрація розв'язку різними методами

Ігор Малик [1], *Тетяна Кнігніцька* [2]

Підбір оптимальних параметрів для однієї задачі кластеризації

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
[1] *E-mail: malyk.igor.v@gmail.com*
[2] *E-mail: knig.tatyana.v@gmail.com*

Пропонується новий підхід до кластеризації часових рядів, що базується на моделі часового ряду. Дана модель грунтується на Байєсівському непараметричному підході з використанням процесу Пуассона-Діріхле для визначення оптимальної кількості кластерів. Модель використовує такі характерні риси часового ряду: тренд, сезонну і випадкову компоненти. Краща кластеризація вибираються відповідно до міри гетерогенності, тобто за допомогою критерію мінімізації (логарифм псевдо граничної ймовірності).

Нехай $y_i = \{y_{it} : t = 1, 2, ..., T\}$, $i = 1, ..., n$ — множина n часових рядів, кожен з яких спостерігається протягом періоду часу T. Модель описується в термінах рівнянь спостереження і еволюції системи:

$$y_{it} = F_{it} x_{it} + \nu_{it}, \tag{1}$$

$$x_{it} = \alpha_1 x_{i,t-1} + ... + \alpha_p x_{i,t-p} + \varepsilon_{it} + \beta_1 \varepsilon_{i,t-1} + ... + \beta_q \varepsilon_{i,t-q}, \tag{2}$$

де $\nu_{it} \sim N(0, \sigma^2_{\nu i})$, $\varepsilon_{it} \sim N(0, \sigma^2_x)$. Еволюційне рівняння (2) описує динаміку коефіцієнтів x_{it}, як $ARMA(p, q)$ процесу авторегресії-ковзаючого середнього, який за допомогою оператора зсуву L, $Lx_{it} = x_{i,t-1}$ можна подати у вигляді: $\alpha_p(L) x_{it} = \beta_q(L) \varepsilon_{it}$.

Стаціонарність $ARMA(p, q)$ процесу визначається лише його $AR(p)$ частиною. Тому умови стаціонарності для процесу $ARMA$ ті ж самі, що й для процесу авторегресії [3]. Процес $ARMA(p, q)$ — стаціонарний, якщо корені характеристичного рівняння AR-частини по модулю менші одиниці. Оберненість $ARMA$ процесу (можливість виразити ε_{it} через x_{it}) визначається умовами оберненості MA-частини. Якщо MA-частина оборотна, то $\varepsilon_{it} = [\beta_q(L)]^{-1} \alpha_p(L) x_{it}$.

Якщо $ARMA$ процес стаціонарний, то за теоремою Вольда він має $MA(\infty)$ представлення. Очевидно, що $E\{x_{it}\} = 0$. Для того, щоб вказати рівень часового ряду, тренд, сезонну і випадкову компоненти в моделі, перепишемо рівняння (1) таким чином:

$$E(y_{it}) = \mu_i + \omega_i' g(t) + \vartheta_i' h(t),$$

де μ_i позначає рівень серій часового ряду, $\omega_i' g(t)$ — поліноміальний тренд, $\vartheta_i' h(t)$ — сезонну компоненту.

Так як ми припускаємо, що спостереження y_{it} є результатом додавання похибки вимірювання ν_{it} до середнього рівня $E(y_{it})$, наша ідея полягає в кластеризації спостережуваного часового ряду $y_i' = (y_{i1}, y_{i2}, ..., y_{iT})$, $i = 1, ..., n$ відповідно до параметрів, що визначають середній рівень $\eta_i = (\mu_i, \omega_i, \vartheta_i, \theta_i)$. Однак, в залежності від характеристик даних, не всі параметри, представлені в η_i будуть корисними для цілей кластеризації. Наприклад, дві серії різних рівнів часового ряду μ_i, але з однаковим трендом, сезонною і випадковою компонентами можуть належати до одного кластеру. Таким чином узагальнена модель має вигляд:

$$y_i = Z\alpha_i + X\beta_i + \theta_i + \varepsilon_i, \tag{3}$$

де Z і X — матриці розмірності $T \times p$ і $T \times d$, відповідно, α_i, β_i, θ_i — вектори розмірності $p \times 1$, $d \times 1$ та $T \times 1$, відповідно. Вказані вектори є параметрами моделі, тобто, $\eta_i = (\alpha_i, \beta_i, \theta_i)$, проте для кластеризації використовуватимуться лише вектори β_i і θ_i. Наприклад, якщо кластеризація грунтується на будь-якому з параметрів крім рівня μ_i, тоді візьмемо $\alpha_i = \mu_i$ і $\beta_i = (\omega_i, \upsilon_i)$. Нарешті, ${\varepsilon_i}' = (\varepsilon_{i1}, ..., \varepsilon_{iT}) \sim N_T(0, \sigma^2_{\varepsilon_i} I)$ являє собою вектор похибок, I — матриця розмірності $T \times T$.

[1] Luis E. Nieto-Barajas, Alberto Contreras-Crist. *A Bayesian Nonparametric Approach for Time Series Clustering* // Bayesian Analysis. – 2014. – **9**. – P. 147-170.

[2] Argiento, R., Cremaschi, A. and Guglielmi, A. *A Bayesian nonparametric mixture model for cluster analysis* // Technical report Quaderno Imati CNR. – 2012. – **3-MI**. – ISSN 1722-8964.

[3] Канторович Г.Г. *Лекции по курсу «Анализ временных рядов»* // Экономический журнал ВШЭ. – 2002. – **3**. – С. 379-401.

Володимир Маслюченко [1], *Василь Мельник* [2]

Про проміжну многозначну функцію

[1] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: v.maslyuchenko@gmail.com
[2] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: windchange7@gmail.com

Класична теорема Гана про проміжну функцію [1] твердить, що для довільних напівнеперервних відповідно зверху і знизу функцій $g : X \to \mathbb{R}$ і $f : X \to \mathbb{R}$, заданих на метричному просторі X, і таких, що $g(x) \leq h(x)$ на X, існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, для якої $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ на X. Ця теорема дістала значний розвиток у працях Ж. Д'єдонне, Г. Тонга, М. Катетова, К. Даукера, Е. Майкла та інших математиків. В останні роки інтерес до неї відновився, бо з'явилися нові напрямки узагальнень і аналогів (див. [2,3,4] і вказану там літературу).

Природно поставити аналогічну задачу для многозначних відображень, тобто дослідити для яких топологічних просторів X і Y і неперервних відповідно зверху і знизу многозначних відображень $G : X \to Y$ і $H : X \to Y$, таких, що $G(x) \subseteq H(x)$ на X, існує неперервна відображення $F : X \to Y$, для якого $G(x) \subseteq F(x) \subseteq H(x)$ на X. Наскільки нам відомо, таке питання раніше не ставилось. Тут ми подаємо перші результати на цю тему.

Теорема 6 *Нехай X нормальний простір і (G, H) — пара Гана, така, що $G(x) = [g_1(x), g_2(x)]$ і $H(x) = [h_1(x), h_2(x)]$ для кожного $x \in X$. Тоді існує проміжна для (G, H) неперервна функція $F : X \to \mathbb{R}$ така, що $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ на X, де функції f_1 і f_2 є неперервними.*

Теорема 7 *Нехай X — топологічний простір, (g, h) — пара Гана на X, $G(x) = (-\infty, g(x)]$ і $H(x) = (-\infty, g(x)]$, і пара Гана (G, H) має проміжну неперервну функцію $F : X \to \mathbb{R}$. Тоді пара Гана (g, h) також має проміжну неперервну функцію $f : X \to \mathbb{R}$.*

[1] Hahn H. *Uber halbstetige und unstetige Functionen* // Sitzungsberichte Akad.Wiss.Wien. Math. - naturwiss.Kl.Abt.IIa. — 1917. — **126**. — S.91-110.

[2] Маслюченко В.К., Мельник В.С. *Про рівномірне відхилення від простору неперервних функцій* // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – **Т.XI**, №1. – С. 158-166.

[3] Маслюченко В.К., Мельник В.С. *Теореми про проміжну афінну функцію для опуклої і вгнутої функцій* // Бук. мат. журн. – 2016. – **4**, №1. – С. 110-116.

[4] Маслюченко В.К., Мельник В.С. *Існування проміжних кусково лінійних та нескінченно диференційовних функцій* // Бук. мат. журн. – 2016. – **4**, №2-3. – С. 93-100.

Василь Маценко

Огляд праць з математичного моделювання динаміки вікової структури біологічних популяцій

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна
E-mail: vgmatsenko@gmail.com

Питання динаміки чисельності біологічних популяцій займає центральне місце в теоретичних і практичних задачах екології. Основи динамічної теорії біологічних популяцій були започатковані в роботах В. Вольтерри, А. Лотки та ін. Ці моделі стали тим ґрунтом, на якому швидкими темпами стала розвиватися математична екологія.

Досить довгий час математичні моделі динаміки популяцій описувалися звичайними диференціальними рівняннями. Звичайні рівняння маємо тоді, коли незалежною змінною є час t, тобто популяції описуються загальною чисельністю особин $N(t)$.

В останній час приділяється значна увага моделям, що враховують неоднорідності особин, зокрема, моделям динаміки вікової структури (ДВС) популяцій, що враховують розподіл загальної чисельності по віку. Вікова густина описується розподіленою функцією $x(\tau,t)$, де τ – вік особин, так що $\int\limits_0^\infty x(\tau,t)d\tau = N(t)$.

Одна з перших моделей ДВС, яка стала вже класичною, належить фон Фоерстеру [1], і представляє собою лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних вигляду

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial t} = -d(\tau,t)x(\tau,t), \quad \tau, t > 0, \tag{1}$$

$$x(0,t) = \int\limits_0^\infty b(\tau,t)x(\tau,t)d\tau, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$x(\tau,0) = \varphi(\tau), \quad \tau \geq 0, \tag{3}$$

де $d(\tau,t)$, $b(\tau,t)$ – коефіцієнти виживання та народжуваності, відповідно. Така модель досліджувалася в [2] і було показано, що динаміка вікового складу визначається системним параметром

$$H = \int\limits_0^\infty b(\tau) \exp\Big(- \int\limits_0^\tau d(\xi) d\xi \Big) d\tau, \tag{4}$$

який отримав назву біологічного потенціала.

Але більш адекватними є нелінійні моделі, які враховують ефекти міжвікової та внутрішньовидової конкуренції.

Одна з перших таких моделей досліджувалася в роботі [3] і представляє собою узагальнення логістичного рівняння Ферхюльста на випадок урахування вікової структури. При цьому замість рівняння (1) маємо рівняння вигляду

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial t} = -[d(\tau, t) + p(\tau, t) x(\tau, t)] x(\tau, t). \tag{5}$$

Для задачі (5), (2), (1) при умовах:

1) $d(\tau, t)$, $p(\tau, t) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$;

2) $b(\tau, t)$ – неперервна по t, інтегрована і кусково-неперервна по τ в області $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$;

3) $\varphi(\tau)$ – інтегрована й диференційована на $\mathbb{R}^+$;

4) $d(\tau, t)$, $p(\tau, t)$, $b(\tau, t) \geq 0$, $\tau, t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(\tau) \geq 0$, $\tau \in \mathbb{R}^+$,

доведена теорема про існування та єдиність невід'ємних розв'язків.

Знаходження розв'язків задачі (5), (2), (3) зводиться до розв'язування нелінійного інтегрального рівняння відносно $\psi(t)$ вигляду [3]

$$\psi(t) = \int\limits_0^t \frac{K(\tau, t) \psi(t - \tau)}{1 + P(\tau, t) \psi(t - \tau)} d\tau + G(t), \tag{6}$$

де

$$K(\tau, t) = b(\tau, t) \Lambda(\tau, t), \quad \Lambda(\tau, t) = \exp\Big(- \int\limits_0^\tau d(\xi, t - \tau + \xi) d\xi \Big),$$

$$P(\tau, t) = \int\limits_0^\tau p(\xi, \tau - t + \xi) \Lambda(\xi, t - \tau + \xi) d\xi, \quad t \geq \tau,$$

$G(t)$ – відома функція, що визначається через $\varphi(\tau)$ [3].

Функція $\psi(t)$ має біологічний зміст - це є кількість новонароджених в момент часу t, тобто $\psi(t) = x(0,t)$.

При моделюванні динаміки поведінки біологічних угрупувань особливу роль відіграють стаціонарні режими, оскільки саме ці режими найчастіше реалізуються в природі. Тому їх дослідження має конкретне практичне значення як істотний крок на шляху розумінні природних процесів.

Для моделі

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial t} = -[d(\tau) + p(\tau)x]x,$$

$$x(0,t) = \int_0^\infty b(\tau)x(\tau)d\tau.$$

знайдені стаціонарні розв'язки та досліджена їхня стійкість.

Показано [3], що за умови

$$H > 1 \tag{7}$$

існує ненульовий стаціонарний розв'язок, причому він є асимптотично стійкий.

Встановлено [3], що значення $H = 1$ є критичним, коли H стає меншим за одиницю популяція приречена на вимирання.

У випадку внутрішньовидової конкуренції рівняння (5) набуває вигляду

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial t} = -\Big(d(\tau,t) + \int_0^\infty a(\tau,t,s)x(x,t)ds\Big)x. \tag{8}$$

Задача (8), (2), (3) досліджувалася в роботах [4, 5]. Умови виживання в стаціонарному середовищі також мають вигляд (7).

В загальнішому випадку популяційна задача має вигляд [6]

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial t} = -\mu(\tau, S_1(t))x, \tag{9}$$

$$x(0,t) = \int_0^\infty b(\tau, S_1(t))x(\tau,t)d\tau, \tag{10}$$

де $S_1(t)$, $S_2(t)$ – зважені чисельності

$$S_1(t) = \int\limits_0^\infty \gamma_1(\tau) x(\tau,t) d\tau, \quad S_2(t) = \int\limits_0^\infty \gamma_2(\tau) x(\tau,t) d\tau.$$

Частинні випадки моделі (9), (10) розглядалися в роботі [7]. Тут для зважених за віком чисельностей популяцій побудовані системи звичайних диференціальних рівнянь, що описують ці величини. Для цих систем відшукуються стаціонарні розв'язки та досліджуються на стійкість.

В роботі [8] побудовані функціонали типу функцій Ляпунова, які дозволяють вивчати стійкість стаціонарних розв'язків прямим методом Ляпунова.

Окремий цикл робіт [9, 10, 11, 12] стосується побудови та аналізу моделей відбору. Відбір є фундаментальним механізмом зміни стану екосистеми, її еволюції та самоорганізації.

Важливе значення для наслідків процесу відбору має врахування вікової структури. Математична модель процесів відбору в межах однієї популяції з віковою структурою вивчалася в [9], а для угрупування з n видів – в роботах [10, 11, 12]. Тут розглядаються системи, для яких

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^\infty x_i(\tau,t) d\tau = \mathrm{const}$$

і визначається, який з видів має більше шансів на виживання.

Отже, врахування вікового розподілу особин в популяції призводить до якісно нових результатів.

[1] Von Foerster H. *Some remarks on changing populations* // Kinetics of Cellular Proliferation. – New York: Crune and Stratton, 1959. – P. 382–407.

[2] *Динамическая теория биологических популяций* / Под ред. Р.А. Полуэктова. – М.: Наука, 1974. – 455 с.

[3] Маценко В.Г. *Об одном классе уравнений математической физики, возникающих в динамике биологических макросистем* // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. – 1981. – Т. 21, № 1. – С. 69–79.

[4] Маценко В.Г. *Існування та єдиність в задачах динаміки вікової структури біологічних популяцій з внутрішньовидовою конкуренцією* // Буковинський математичний журнал, 2014. – Т. 2, № 1. - С. 167–172.

[5] Маценко В.Г. *Аналіз стійкості стаціонарних розв'язків в моделях динаміки вікової структури популяцій з внутрішньовидовою конкуренцією* // Буковинський математичний журнал, 2016. – Т. 4, № 1–2. - С. 117–121.

[6] Маценко В.Г. *Нелінійна модель динаміки вікової структури популяцій* // Нелінійні коливання, 2003. – Т. 6, № 3. – С. 357–367.

[7] Маценко В.Г. *Аналіз моделей динаміки зважених за віком чисельностей біологічних популяцій* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 76–78.

[8] Маценко В.Г., Рубановский В.Н. *Применение прямого метода Ляпунова для анализа динамики возрастной структуры биопопуляций* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 1983. – Т. 23, № 2. – С. 326–332.

[9] Маценко В.Г. *Моделі відбору в популяціях з віковою структурою* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 228. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С. 70–73.

[10] Ebeling W., Engel A., Macenko V. *Modelling of Selection Processes with age-depenent birth and death rates* // Biosystems. – 1986. – 19. – P. 213–221.

[11] Маценко В.Г. *Аналіз математичної моделі відбору в екосистемах з віковою структурою* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 314–315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 129-133.

[12] Маценко В.Г. Моделювання процесів вдбору в системах з віковою структурою // Наук. вісн. Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інф. – Ужгород, 2010. – Вип. 20. – С. 90–97.

Галина Мельник [1], *Володимир Скіцько* [2]

Моделювання процесів взаємодії суб'єктів електронної логістики з використанням CPN

[1] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: firstmy555@gmail.com
[2] *ДВНЗ "Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана", Київ, Україна*
E-mail: skitsko.kneu@gmail.com

Електронна логістика є складною системою, для дослідження роботи якої, на наш погляд, доцільно використовувати інструментарій теорії графів, зокрема, через його наочність та можливість моделювати не тільки статичні системи, але й динамічні процеси. Одним з перспективних розділів теорії графів є мережі Петрі. Тому для моделювання процесів взаємодії Інтернет-магазину із покупцями в контексті електронної логістики пропонується використати розфарбовану мережу Петрі (англ. *Coloured Petri Net* - *CPN* або *CP-net*) комбінованого типу, де для деяких переходів визначено часові затримки.

В загальному вигляді розфарбована комбінована (щодо часових затримок в переходах) мережа Петрі може бути представлена наступним чином [1]:

$$CPN_T = (\Sigma, P, T, A, N, C, G, E, IN) \tag{1}$$

де Σ - скінчена непорожня множина типів, які називаються кольоровими мітками; P - скінчена множина позицій; T - скінчена множина переходів, серед яких T_{MS} - підмножина переходів без часової затримки, T_{TMS} - підмножина переходів, для яких визначено часові затримки маркерів; A - скінчена множина дуг; N - функція на вузлах (позиціях та переходах), що визначена з A; - функція на кольорах, що визначена з P на Σ; G - функція обмежень (спускова функція), що визначена з T; E - функція висловлювань на дугах, що визначена з A; IN - функція ініціалізації, що визначена з P.

На основі висунутих припущень, щодо взаємодії покупця та Інтернет-магазину, встановлено правила, які відображено у вигляді відповідної розфарбованої комбінованої (за часом) мережі Петрі [2]. Задача моделювання в нашому випадку зводиться до розгляду можливого досяжного маркування розфарбованої мережі Петрі з врахуванням часових затримок в переходах. Для її розв'язання послідовно визначаються активні переходи та використовуються правила їх спрацьовування. Дерево досяжного маркування для нашої задачі наведено в [2].

Побудована модель з використанням розфарбованої комбінованої (за часом) мережі Петрі дає можливість внести зміни в концептуально-логічну схему функціонування електронної логістики Інтернет-магазину (у частині взаємодії із покупцем) як на етапі проектування, так і на етапі функціонування. Імітація поведінки покупця дозволяє частково передбачити його дії чи запити і, тим самим, оптимізувати роботу Інтернет-магазину з метою надання йому (покупцю) додаткового часу на пошук товару чи оплату за товар, пропозицій щодо заміни відсутнього товару, аналогів товару нижчої ціни чи іншої торгової марки тощо. Моделювання дій менеджера дозволяє підвищити ефективність відділу збуту Інтернет-магазину щодо реакції на запити користувача, вивчення попиту на певні найменування товару тощо.

[1] Bozek A., Zabinski T. *Coloured timed Petri Nets as tool of off-line simulating for intelligent manufacturing systems* // Przeglyad Elektrotechniczny (Electrical Review). – 2010. – **Vol. 2010**, No. -9- P. 101-105.

[2] Скіцько В. І., Мельник Г. В. *Моделювання процесів електронної логістики Інтернет-магазину з використанням розфарбованих комбінованих (за часом) мереж Петрі* // Економічний часопис-XXI. – 2015. – **7-8**, -(2)- С. 65-68.

Василь Мойсишин [1], *Богдан Борисевич* [1], *Руслан Щербій* [2]

Удосконалення технології відробки шарошкових доліт на основі експериментальних досліджень процесу буріння

[1] *Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна*
E-mail: math@nung.edu.ua
[2] *Науково-дослідний і проектний інститут ПАТ "Укрнафта", Івано-Франківськ, Україна*

Процес буріння є найбільш енергозатратним зі всього циклу будівництва свердловини. Загальна потужність приводу, що відповідає цим енергозатратам, знаходиться в межах 1000-2000 кВт.

Величина енергії, яка підводиться до шарошкового долота під час роторного буріння, складає 12-15% від загальної енергії, затраченої на поглиблення свердловини. За взаємодії бурильного інструменту з вибоєм свердловини виникають коливання корпуса долота, енергія яких у 5 разів перевищує енергію процесу руйнування породи.

Для її зменшення в компонування низу бурильної колони (КНБК) включають віброзахисні пристрої (ВЗП). За результатами промислових випробувань з'ясовано вплив цих пристроїв на основні техніко-економічні характеристики процесу буріння. Використання ВЗП змінює жорсткість C і демпфування β КНБК. Вивчення закономірностей перерозподілу енергії, підведеної до долота, дає можливість підвищити ефективність процесу буріння з одночасним зниженням енергозатрат на будівництво свердловин.

Метою дослідження є підвищення ефективності процесу буріння свердловин роторним способом на основі аналізу результатів стендових експериментальних досліджень впливу зміни жорсткості та демпфування бурильного інструменту на техніко-економічні показники і енергоємність процесу руйнування породи.

В ІФНТУНГ для проведення експериментальних досліджень на базі верстата СБА-500 створено буровий стенд, оснащений інформаційно-вимірювальним комплексом. З метою встановлення залежностей між механічною швидкістю V_{MEX} з одного боку та режимними параметрами процесу буріння (осьовим статичним навантаженням на долото F_{CT} і частотою обертання n_∂) і характеристиками C, β бурильного інструменту з другого боку проведено 144 серії експериментів (371 дослід) за класичною схемою. Витрата промивальної рідини була постійною, складала 7 л/с і забезпечувала повне очищення вибою від шламу.

Авторами запропоновано методику обробки проходки h на долото, що складається з трьох етапів:

– виділення однорідних за буримістю інтервалів розрізу свердловини;

– визначення статистичних характеристик вибірок значень механічної швидкості буріння на виділених інтервалах та перевірка відповідності цих вибірок нормальному закону розподілу;

– виділення вибірок значень механічної швидкості буріння, які відносяться до однієї генеральної сукупності, з використанням статистичної перевірки параметричних гіпотез.

Розроблено методику визначення енергоємності процесу руйнування гірської породи за записами проходки h та обертового моменту T_∂ на долоті.

Експериментально з ймовірністю більшою за 0,95 доведено вплив жорсткості C та демпфування β бурильного інструменту на механічну швидкість та енергоємність буріння свердловин шарошковими долотами.

Для зміни жорсткості C використовувались гвинтові пружини стиску, а для зміни демпфування β – гідравлічні поглиначі коливань з різною кількістю дросельних отворів.

За результатами експериментальних досліджень вперше одержано залежності енергоємності $\bar{W}$ процесу руйнування породи від параметрів C, β бурильного інструменту, які представлено поліномами другого степеня. Встановлено, що зі збільшенням твердості породи мінімум залежності $\bar{W} = f(C)$ зміщується в бік більших значень жорсткості, а максимум залежності $\bar{W} = f(\beta)$ зміщується в бік вищих значень демпфування.

Результати стендових досліджень дозволили уточнити з урахуванням жорсткості та демпфування бурильного інструменту цільовий критерій вибору оптимальних режимів буріння – максимум механічної швидкості проходки та запропонувати новий критерій – мінімум енергоємності руйнування гірської породи.

Авторами за результатами планованого експерименту запропоновано багатофакторні емпіричні моделі механічної швидкості та енергоємності бурінні свердловин шарошковими долотами, які враховують режимні параметри, жорсткість і демпфування бурильного інструменту і мають однаковий якісний характер з моделями, одержаними на основі аналізу розмірностей з використанням критеріїв подібності.

Розроблено методики адаптації результатів стендових експериментальних досліджень до промислових умов буріння нафтових, газових і дегазаційних свердловин. За результатами впровадження методик одержано збільшення механічної швидкості в 1,6 рази при бурінні 15 дегазаційних свердловин.

[1] *Стійкість і коливання бурильної колони* / В.М. Мойсишин, Б.Д. Борисевич, Ю.Л. Гаврилів, С.Д. Зінченко. – Івано-Франківськ: Лілея-НВ, 2013. – 590 с.

[2] *Комплексне освоєння газовугільних родовищ на основі потокових технологій буріння свердловин* / В.М. Мойсишин, І.М. Наумко, В.І. Пилипець та ін. – К.: Наукова думка, 2013. – 310 с.

[3] Moisyshyn V. *Multifactorial mathematical model of mechanical drilling speed* / V. Moisyshyn, B. Borysevych, R. Shcherbiy // Mining of Mineral Deposits. – CRC Press, Taylor & Francis Group, a Balkema Book, 2013, p. 359-368.

[4] *Багатофакторна математична модель енергоємності процесу руйнування гірської породи* / В.М. Мойсишин, Б.Д. Борисевич, Р.Б. Щербій та ін. // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – Івано-Франківськ, 2013. – № 1 (46). – С. 66-78.

Володимир Мороз

Крайова задача з м'якими межами для параболічних диференціальних рівнянь з операторами Бесселя, Лежандра, Ейлера

Хмельницький національний університет, Хмельницький, Україна
E-mail: morozvv2008@yandex.ua

Розглянемо параболічну крайову задачу з м'якими межами, яка математично зводиться до інтегрування в області $D_2 = \{(t, r) : t \in \in (0, \infty);\ r \in I_2 = (0, R_1) \bigcup (R_1, R_2) \bigcup (R_2, R_3);\ R_3 < \infty\}$ диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[u_1] = f_1(t, r), r \in (R_0, R_1), \\ &\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[u_2] = f_2(t, r),\ r \in (R_1, R_2), \\ &\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B^*_{\alpha_2}[u_3] = f_3(t, r), r \in (R_2, R_3) \end{aligned} \tag{1}$$

з нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\begin{gathered} \lim_{r\to 0} [r^\gamma u_1(t, r)] = 0; \\ \left[\left(\alpha_{22}^3 + \delta_{22}^3 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^3 + \gamma_{22}^3 \frac{\partial}{\partial t}\right] u_3(t, r)\bigg|_{r=R_3} = g_R(t) \end{gathered} \tag{2}$$

та умовами спряження $(j, k = 1, 2)$

$$\begin{gathered} \left\{\left[\left(\alpha_{j1}^k + \delta_{j1}^k \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k + \gamma_{j1}^k \frac{\partial}{\partial t}\right] u_k(t, r) - \right. \\ \left. - \left[\left(\alpha_{j2}^k + \delta_{j2}^k \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k + \gamma_{j2}^k \frac{\partial}{\partial t}\right] u_{k+1}(t, r)\right\}\bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t). \end{gathered} \tag{3}$$

Розв'язок мішаної крайової задачі (1) – (3) будуємо методом гібридного інтегрального перетворення Бесселя–Лежандра–Ейлера за формулами [1]:

$$H^{(\mu)}_{v,(\alpha);n}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r)\ v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(r, \beta_n)\ \sigma(r)\, dr \equiv \tilde{g}_n, \tag{4}$$

$$H_{v,(\alpha);n}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n \; v_{v,(\alpha)}^{(\mu)}(r, \beta_n) \equiv g(r). \tag{5}$$

$$\begin{gathered} H_{v,(\alpha);n}^{(\mu)} \left[M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)] \right] = -\beta_n^2 \, \tilde{g}_n - \sum_{i=2}^{3} k_i^2 \tilde{g}_{in} + \left(\tilde{\alpha}_{22}^3 \right)^{-1} \times \\ \times \; v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3, \beta n) \; a_3^2 \; \sigma_3 \; R_3^{2\alpha_2+1} g_R + \\ + \sum_{k=1}^{2} d_k \left[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta_n) \, \omega_{2k} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta_n) \, \omega_{1k} \right]. \end{gathered} \tag{6}$$

У результаті застосування оператора $H_{v,(\alpha);n}^{(\mu)}$ до крайової задачі (1) – (3), внаслідок основної тотожності (6) одержуємо задачу задачу Коші [2]:

$$\frac{d\,\tilde{u}_n}{dt} + (\beta_n^2 + \gamma^2) \; \tilde{u}_n = \tilde{F}_n(t), \tag{7}$$

$$\tilde{u}_n(t)|_{t=0} = 0; \;\; \gamma^2 = \max\{\gamma_1^2; \; \gamma_2^2; \; \gamma_3^2\}. \tag{8}$$

Розв'язком задачі Коші (7), (8) є функція

$$\tilde{u}_n(t) = \int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)} \; \tilde{F}_n(\tau) \; d\tau. \tag{9}$$

Застосуємо оператор $H_{v,(\alpha);n}^{-(\mu)}$ за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\tilde{u}_n(t)]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена за формулою (9). У результаті елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок задачі (1) – (3):

$$u_j(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t) \, v_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r, \beta_n) = \int\limits_0^t \int\limits_0^{R_1} H_{\nu,(\alpha);j1}^{(\mu)}(t-\tau, r, \rho) \, f_1(\tau, \rho) \times$$

$$\times \, \sigma_1 \, \rho^{2\alpha_1+1} d\rho \, d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_{R_1}^{R_2} H_{\nu,(\alpha);j2}^{(\mu)}(t-\tau, r, \rho) \, f_2(\tau, \rho) \, \sigma_2 \; \mathrm{sh} \; \rho \, d\rho \, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{R_2}^{R_3} H_{\nu,(\alpha);j3}^{(\mu)}(t-\tau, r, \rho) \, f_3(\tau, \rho) \, \sigma_3 \rho^{2\alpha_2 - 1} \, d\rho \, d\tau + \tag{10}$$

$$+\int_0^t W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3j}(t-\tau,r)g_R(\tau)\,d\tau+\sum_{k=1}^{2} d_k\int_0^t\Big[R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);12}(t-\tau,r)\;\omega_{2k}(\tau)\;-$$

$$-\,R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);22}(t-\tau,r)\;\omega_{1k}(\tau)\Big]\;d\tau;\;j=\overline{1,3}.$$

У формулах (10) беруть участь головні розв'язки:

1) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j3}(t,r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)\,t}\;\times$$

$$\times v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\;v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta_n);\;j,k=\overline{1,3};$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3j}(t,r)=(\tilde{\alpha}^3_{22})^{-1}R_3^{2\alpha_2+1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)\,t}\times$$

$$\times v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(R_3,\beta_n)\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n);\;j=\overline{1,3};$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);12}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)\,t}\times$$

$$\times Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);i2}(\beta_n)\;v^{(\mu)}_{v,(\alpha);j}(r,\beta_n);\;i,k=1,2;\;j=\overline{1,3}.$$

Висновки. Методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Лежандра-Ейлера зі спектральним параметром одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для рівнянь параболічного типу на трискладовому сегменті полярної осі з м'якими межами. Побудований розв'язок неперервно залежать від параметрів та даних задачі й може використовуватись як в теоретичних дослідженнях, так і при комп'ютерному моделюванні еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах.

[1] Ленюк М.П., Мороз В.В. *Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при навності спектрального параметра в крайових умовах та умовах спряження* // Науковий вісник Чернівецького університету. Випуск 314-315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 105–113.

[2] Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* – М.: Физматгиз, 1959. – 428 с.

Ігор Нестерук [1], *Богдан Шепетюк* [2]

Дослідження форм тонких осесиметричних стаціонарних штучних каверн у вертикальному потоці води

[1] *Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна*
E-mail: inesteruk@yahoo.com
[2] *ЧНУ імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: shepetyukb@gmail.com

Опір високошвидкісних підводних транспортних засобів, може бути зменшений шляхом зменшення площі, яка змочується водою, тобто за допомогою використання суперкавітації (дивись, наприклад, [1-3]). Для отримання малих значень числа кавітації при малих швидкостях або на великих глибинах руху, використовується піддув каверни газом (див, наприклад, [4]). Вентиляція також дуже важлива в експериментах, оскільки швидкості в експериментальних установках, як правило, набагато менші, ніж для реальних транспортних засобів. Обмежені швидкості кавітаційних труб суттєво збільшують вплив гравітації на форми і розміри каверни. Теоретичні та чисельні дослідження вентильованих каверн вельми обмежені. Навіть в тому випадку, коли вплив потоку газу усередині каверни і гравітації незначні, немає повної теорії для форми каверни в залежності від швидкості подачі газу, числа кавітації і форми тіла, розташованого усередині каверни.

Якщо газ рухається у вузькому каналі між поверхнею каверни і корпусом транспортного засобу, то тиск на поверхні каверни не є постійним і змінює її форму в порівняні з випадком парової кавітації. Це складне явище досліджувалось чисельно з використанням рівнянь в'язкої рідини [5]. Використання моделі ідеальної рідини і теорії тонкого тіла дозволяє отримати прості рівняння для форми осесиметричних вентильованих суперкаверн, якщо потік газу між поверхнею каверни і тіла обертання є одновимірним, нев'язким і нестисливим.

Деякі цікаві результати були отримані в роботах [6-8] для стаціонарного потоку рідини без гравітаційних ефектів. В роботі [9] результати цих робіт узагальнені для нестаціонарних вертикальних потоків в полі сили тяжіння. Зокрема, було запропоновано рівняння першого наближення для радіуса R(x) стаціонарної осесиметричної вентильованої каверни

$$\frac{d^2R^2}{dx^2} = \frac{\sigma_0}{\ln\epsilon} + \frac{2kx}{Fr^2\ln\epsilon} + \tag{1}$$

$$+\Delta\left[a - \frac{1}{(R^2 - R_b^2)^2}\right],$$

де всі довжини є безрозмірними (віднесені до радіусу каверни в її початку R_0), $k = 1$ відповідає випадку, коли напрямки потоку води на нескінченності і гравітаційного прискорення збігаються; $k = -1$ відповідає випадку, коли напрямки цих векторів протилежні. Значення параметрів σ_0, Fr, Δ і a визначаються формулами:

$$\sigma_0 = \frac{2(p_\infty - p_v - p_0)}{\rho U^2}, \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gR_0}},$$

$$\Delta = -\frac{\rho_g Q^2}{\pi^2 R_0^4 \rho U^2 \ln\epsilon}, \quad a = \left[1 - \frac{R_{b0}^2}{R_0^2}\right]^{-2},$$

де ρ густина води; U стала швидкість потоку води на нескінченності; pv -тиск водяної пари при температурі навколишнього середовища; p_∞ і p_0 тиски, виміряні в поперечному перерізі каверни далеко в потоці води і газі на початку каверн відповідно; ρ_g постійна густина газу;; Q об'ємне витрачання газу; R_b, R_{b0} радіуси корпусу в точках x і $x = 0$; ϵ малий параметр, відношення максимального радіуса системи каверна-кавітатор до його довжини.

У даному дослідженні розглянуті числові рішеннях рівняння (1) при різних значеннях числа Фруда Fr і параметра k. Розраховані форми і розміри вентильованих каверн і проаналізовані критичні значення інтенсивності піддуву.

[1] Логвинович Г.В. *Гидромеханика течений со свободными границами.* – К.: Наук. думка, 1969. – 208 с.

[2] Savchenko Yu. N. *Perspectives of the Supercavitation Flow Applications* // Int. Conf. on Superfast Marine Vehicles Moving Above, Under and in Water Surface (SuperFAST'2008), 2–4 July 2008. St. Petersburg, Russia. – 2008.

[3] I. Nesteruk *Drag drop on high-speed supercavitating vehicles and supersonic submarines* // Applied Hydromechnics. – 2015. – **vol. 17**, N 4. – P. 52 – 57. http://hydromech.org.ua/content/pdf/ph/ph-17-4

[4] Vlasenko, Yu. D., Savchenko, G. Yu. *2012 Study of the parameters of a ventilated supercavity closed on a cylindrical body, I. Nesteruk (ed.).* // Supercavitation. – 2012. – **Springer**, – P. 201-214.

[5] Zhuravlev, Yu. F., Varyukhin, A.V. *Numerical simulationof interaction gas jets flowing into water cavity with its free surfaces simulation* // Int. Conf. SuperFAST2008. –2008.

[6] Манова З.І., Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. *Оцінки впливу вентиляції на форму тонких осесиметричних каверн* // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – **Т. 13(85)**,N 2. – С. 44-50.

[7] Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. *Особливості форми донних штучних осесиметричних каверн* // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – **Т.13(85)**, N 3. – С. 64-75.

[8] Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. *Форма штучних осесиметричних каверн ри до - та надкритичних значеннях інтенсивності піддуву* // Прикладна гідромеханіка. – 2012. – **Т.14**, N 2. – С. 53-60.

[9] Nesteruk, I. *Shape of Slender Axisymmetric Ventilated Supercavities* // Journal of Computational Engineering. – 2014. – **V.2014**, Article ID 501590. – P. 18.doi:10.1155/2014/501590.

Сергій Остапов, Володимир Жихаревич, Іван Миронів

Інформаційна технологія розпізнавання символів на основі клітинних автоматів

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: s.ostapov@chnu.edu.ua

Сьогодні на ринку офісного програмного забезпечення існує багато комерційних систем розпізнавання тексту. Вони активно використовуються у повсякденній роботі, але у разі розпізнавання деформованих символів або таких, що частково накладаються, не кажучи вже про рукописні, виникають серйозні проблеми. Тому розробка нових методів, які впевнено працювали би в складних випадках розпізнавання є актуальною науково-технічною задачею [1].

Одним з варіантів вирішення цієї проблеми є залучення до таких задач конкуруючих клітинних автоматів.

Подамо символи латинської абетки у вигляді множини клітинних автоматів (КА):

$$\Sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{N}, \tag{1}$$

де N – потужність алфавіту (наприклад, для латини – $N = 26$). Кожен КА має свою множину характеристичних станів U, які однозначно описують один з символів абетки:

$$U = \{u_k\}_{k=1}^{M}, \tag{2}$$

де M – кількість характеристичних станів КА.

Тоді кожен КА буде характеризуватися своєю множиною станів, залежати від дискретного часу t та описуватися міткою ξ, яка однозначно ідентифікує цей КА:

$$\sigma_i = \sigma_i(U, t, \xi). \tag{3}$$

КА, що знаходиться в момент часу t у певному стані u_k, може переходити у сусідній стан u_{k+1} (u_{k-1}) згідно правил, які визначаються функцією переходу:

$$\sigma_i(u_{k+1}, t+1, \xi) = \varphi(\sigma_i(u_k, t, \xi)). \tag{4}$$

Перехід може виконуватися, при умові, що стан u_{k+1} (u_{k-1}) знаходиться в околі стану u_k і дозволений правилами переходу.

Нехай відсканований текст подано у вигляді клітинно-автоматного поля, на якому можуть рухатися КА. Зображення кожного символу представляється у вигляді масиву КА-станів, аналогічних станам самих КА:

$$\Omega = \{\omega_p\}_{p=1}^{P}. \qquad (5)$$

Тут P – кількість станів, яка однозначно описує певний символ і може бути різною залежно від розмірів символу та відносного розташування його частин. Представлення зображення символу у вигляді множини станів дозволяє нам абстрагуватися від його розмірів, товщини та особливостей написання.

Процес розпізнавання. На початку процесу розпізнавання усі типи КА розміщуються на КА-полі у випадковому порядку. Найкращим варіантом розміщення КА є такий, коли на кожен символ потрапили усі типи КА. На наступному кроці починається рух КА по сусідніх станах ω_p відповідного символу. Перехід у новий стан дозволяється, якщо $\forall\,\omega_p \in \Omega\ \exists\, u_k \in U$. Якщо ж $\forall\,\omega_p \in \Omega\ \nexists\, u_k \in U$, вважається, що даний КА не відповідає поточному символу і він вилучається з КА-поля. В результаті такого руху на поточному символі залишаться лише такі КА, які досягають усі свої характеристичні стани з множини U. Однак на цьому процес розпізнавання не можна вважати завершеним, оскільки на деяких символах може бути декілька КА, що повністю задовольняють усі свої стани. Зокрема, це можуть бути символи "Н" та "І", "О" та "С" тощо. Для правильного розпізнавання у таких випадках використовується розроблений нами механізм конкуренції [2].

Механізм конкуренції КА. Нехай на символі "Н" рухаються два КА, які досягають усіх своїх характеристичних станів: типу "Н" і типу "І". Позначимо через N_H ($N_H = 1$) кількість КА типу "Н" та через N_I ($N_I = 1$) – кількість КА типу "І". При досягненні чергового характеристичного стану з множини U кожен КА створює свою копію, розміщуючи її на клітинах поточного символу, тобто $N_H = N_H + 1$ та $N_I = N_I + 1$. Оскільки у символу "Н" 6 характеристичних станів (верхні й нижні кінцеві точки та розгалуження на перетинці), а у символу "І" – два таких стани (верхній та нижній кінці), то кількість КА типу "Н" за один повний цикл руху по символу зросте на 6 ($N_H = N_H + 6$), а КА типу "І" – на 2: $N_I = N_I + 2$. Після заповнення усіх станів символу, коли рух КА припиниться, будемо мати $N_H > N_I$. В такому разі КА типу "I" "програв" конкуренцію, і відбувається перетворення усіх його екземплярів у КА типу "H": $\sigma_I(U_I, t, \phi) \to \sigma_H(U_H, t, \eta)$. Тепер зображення символу буде повністю заповнене КА типу "H". Зчитування мітки дасть нам символ, який ми розпізнавали.

Деяке спрощення дозволить підвищити швидкість розпізнавання. Нехай у КА σ_I $M_I = 2$ характеристичних стани, а у КА σ_H $M_H = 6$. "Розмноження" КА можна замінити знаходженням $\max(M_H, M_I)$. Очевидно, що в цьому випадку символ також буде розпізнано як "H".

Перевагою запропонованого методу є те, що він легко розпаралелюється, оскільки розпізнавання кожного символу незалежне. Це традиційна риса КА, яка дозволяє оптимізувати швидкодію цього процесу.

На основі розробленого методу розпізнавання нами запропонована інформаційна технологія, схему якої подано на рис. 1-2.

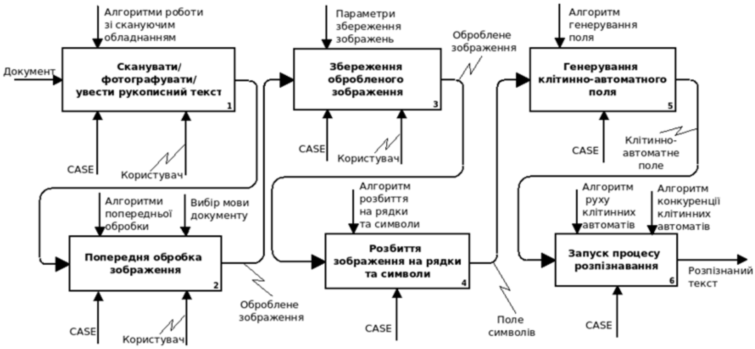


Рис. 1. Схема інформаційної технології розпізнавання тексту на основі конкуруючих клітинних автоматів

Як бачимо, перед розпізнаванням виконується попередня обробка зображення, очищення його від шуму, розбиття його на рядки та символи, генерування клітинно-автоматного поля.

Рис. 2 описує, власне, процес розпізнавання на основі КА. На клітинно-автоматному полі відбувається генерування клітинних автоматів, після закінчення якого запускається рух КА. Під час руху аналізуються сусідні по відношенню до поточного стану КА клітини та визначається можливість руху. Якщо такої можливості немає, КА вилучається з КА-поля. Далі запускається процес конкуренції КА, який дає остаточний результат розпізнавання.

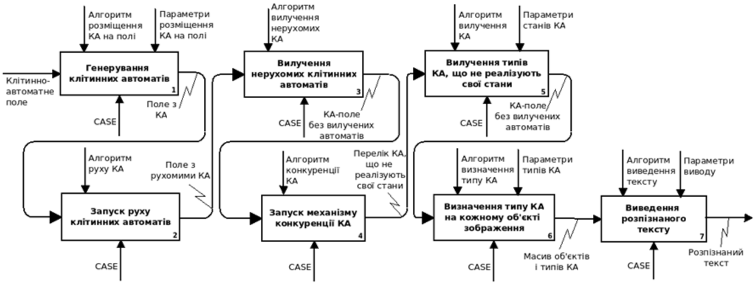


Рис. 2. Схема процесу розпізнавання
на основі конкуруючих клітинних автоматів

Цю інформаційну технологію було реалізовано в програмному забезпеченні (десктопна та мобільна версії), яке продемонструвало ступінь розпізнавання до 98% на друкованому тексті, до 84% – на рукописних символах (креслярський шрифт), до 68% – на деформованих рукописних символах (деформації до 30%) та до 56% правильного розпізнавання рукописних символів, що частково накладаються.

[1] Жихаревич В.В., Остапов С.Е., Миронів І.В. *Аналіз методів розпізнавання символів тексту* // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2016. – № 5 (79). – С. 137-142.

[2] Жихаревич В.В., Миронів І.В., Остапов С.Е. *Алгоритм розпізнавання символів тексту на основі конкуруючих клітинних автоматів* // Радіоелектроніка, Інформатика, Управління. – 2015. – № 4 (35). – С. 39-44.

Тетяна Пилипюк

Класифікація та засоби проектування педагогічних програмних засобів навчального призначення

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, Україна
E-mail: t-myh@i.ua

Педагогічні програмні засоби (ППЗ) – пакети прикладних програм, призначені для вирішення різних завдань навчання: формування знань, умінь і навиків, контролю якості засвоєння, узагальнення і систематизації знань і т.п., а також програмна документація, що визначає порядок застосування програмних засобів. У навчальному процесі можуть застосовуватися різні види ППЗ: комп'ютерні навчальні програми, інформаційно-пошукові системи навчального призначення, експертні системи навчального призначення та ін. Вони відрізняються програмною реалізацією, цілями та способами застосування в навчальному процесі.

Існує багато різних підходів до класифікації ППЗ навчального призначення, але єдиної думки і відповідно загальної класифікації немає, що зазначають більшість авторів [1, 2].

Цікавою є класифікація, заснована на розходженнях у підходах до складання програм. Розрізняють лінійні, рогалужені, генеративні програми, програми моделювання й імітації, ігри, програми вирішення проблем, програми вільного вибору, діалогові системи.

1. Лінійні програми будуються на основі ідеї лінійного програмування, висунутої американським психологом Б. Скіннером. Їх головні переваги – покрокова подача матеріалу, поопераційне підкріплення (видача відповідей на кожному етапі), індивідуалізація навчання (полягає лише в тому, що учень може виконувати завдання в тому темпі, що відповідає його індивідуальним особливостям і можливостям). Втручатися в програму, запросити додаткову інформацію при такому програмуванні учень не може, і в цьому недостатня дидактична цінність підходу. Другий дефект – це розрахунок на певний однозначний спосіб розв'язання кожної задачі.

2. Розгалужені програми будуються на основі запропонованого американським психологом Н. Краудером принципу розгалуженого

програмування. Передбачають видачу різного роду пояснень до варіантів рішень. В історії програмованого навчання створення розгалужених програм стало кроком вперед у порівнянні з лінійними, хоча учень в них не конструює відповідь, а робить вибір з безлічі запропонованих. Основні відмінності цієї програми від лінійної: укладач не виходить з того, що відповідь учня повинна бути неодмінно правильною; учень одержує коментар на свою відповідь і або коректує свою роботу, або рухається далі в певній послідовності.

3. Генеративні програми (програми породження). Дають можливість самостійно розв'язати запропоновану проблему або задачу і тільки після цього запросити в комп'ютера відповідь про правильність свого розв'язку.

4. Програма математичної моделі навчання – по суті створення формалізованої моделі навчальної діяльності.

5. Програми моделювання й імітації – програми, що моделюють явище з імітацією дії.

6. Ігри. Комп'ютерні ігри, на відміну від звичайних, побудовані на використанні аудіо- та візуальних ефектів і дозволяють гравцю виявляти різні здібності.

7. Програми вирішення проблем. Їх створення засноване на гіпотезі, що складання проблемних програм сприяє розвиткові уміння вирішувати будь-які задачі. Цей підхід відрізняється від моделювання тим, що сам процес програмування, а не його предмет, ставиться в центр уваги.

8. Програма вільного вибору. Можливість вибору з наявних у банку центрального комп'ютера програм, здійснення по них запитів про інформацію, що зацікавила. Зв'язок з центральним банком даних здійснюється в рамках локальної мережі або з використанням мережі Інтернет.

9. Діалогова система. Поступове пізнання функцій комп'ютера привело до використання в процесі навчання діалогу з комп'ютером. Складність і різноманітність взаємодії з комп'ютером залежать від мови програмування, здібностей укладача програм, його компетентності в предметі.

Сьогодні розроблено вже значну кількість ППЗ, використання яких дозволяє розв'язувати за допомогою комп'ютера досить широке коло задач різних рівнів складності з усіх навчальних дисциплін. Серед інших інтерес представляють ППЗ навчального призначення з математики та інформатики – їх найбільше.

У програмі початкової освіти вищого навчального закладу студентів знайомлять з ППЗ навчального призначення, а лабораторний практикум з даної навчальної дисципліни передбачає проектування ППЗ доступними засобами, серед яких відомі програми з пакету програм Microsoft Office – електронні таблиці Excel та створення презентацій PowerPoint, а також створення ППЗ з допомогою програми Windows Movie Maker. Для створення педагогічних програмних засобів з допомогою цих програм, достатньо володіти технологією використання функцій в електронних таблицях [3], вміти застосовувати анімацію та тригери в електронних презентаціях [4], використовувати відеоефекти програми Movie Maker. Автором розроблено низку лабораторних занять зі створення ППЗ навчального призначення для початкової школи.

Володіючи основами комп'ютерних технологій, вчителі можуть самостійно готувати педагогічні програмні засоби навчального призначення для початкової школи з різних предметів.

Використання ППЗ у навчально-виховному процесі сприяє підвищенню його ефективності, суттєво впливає на зміст, форми, методи і засоби навчання.

[1] Волинський В.П. *Класифікація програмних засобів навчального призначення*// Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2005. –№1. – С. 19-20.

[2] Гершунский Б.С. *Компьютеризация в сфере образования: проблемы и перспективы.* – Москва: Педагогика, 1987. – 264 с.

[3] Пилипюк Т.М. *Автоматизація створення тестових завдань* // Міжнародна наукова конференція, присвячена 80-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28-30 жовтня 2016 р., Чернівці: матеріали конференції. – Чернівці, 2016. – С. 209-211.

[4] Пилипюк Т.М. *Використання тригерів в інтерактивних презентаціях для створення наочності* // Наук. пр. Кам'янець-Поділ. нац. ун-ту ім. І. Огієнка: зб. за підсум. звіт. наук. конф. викл., докторантів і асп.: вип. 15, у 3 т. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2016. – Т. 2. – С. 32-34.

Василь Сеничак, Владислав Сеничак, Роман Ріпецький

До питання теоретико-ймовірнісного обгрунтування прискореного варіанту методу скінченних елементів

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна
E-mail: math@nung.edu.ua

Встановлення основних закономірностей поведінки частинки, що здійснює випадкові блукання по вузлах цілочисельної решітки, та їх ймовірнісного тлумачення можливе при дослідженні спрощених моделей.

Математична модель симетричного випадкового блукання служить для найпростішого наближеного опису фізичного процесу броунівського руху і дифузії матеріальної частинки, що здійснює випадкові переміщення під дією великої кількості зіткнень з молекулами [1]. Фізичний зміст має лише граничний випадок – неперервний рух. Дискретна схема випадкових блукань, що грунтується тільки на комбінаторних властивостях, приводить до результатів, які є справедливими і у своїй граничній формі.

Розглянемо задачу про повернення частинки в початок координат, що можливе лише через парну кількість кроків (парні моменти часу) [1]. Для цього попередньо дослідимо поведінку числової послідовності ймовірностей $P_{2n}(n), n \in N$ при $p = q = \frac{1}{2}$. Згідно зі схемою Бернуллі ймовірності появи визначеної події рівно k разів в n незалежних випробуваннях $(0 \leq k \leq n)$ обчислюється за формулою

$$P_n\left(k\right) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Послідовність $\{P_{2n}(n)\}$ є монотонно спадною, тобто для усіх n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ виконується нерівність $P_{2n}(n) > P_{2n+2}(n+1)$. Знайдемо граничне значення $\{P_{2n}(n)\}$ при необмеженому зростанні n $(n \to \infty)$:

$$C_{2n}^n \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}.$$

Нагадаємо, що при достатньо великих n $(n \to \infty)$ справедливою є формула Стірлінга:

$$n! \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n},$$

згідно якої
$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}},$$
отже,
$$P_{2n}(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$
тобто
$$\lim_{n\to\infty} P_{2n}(n) = 0.$$

Симетричне випадкове блукання на прямій

Повернемося до задачі про повернення частинки в початок координат (стартове положення). Нехай P_{2n} – ймовірність повернення частинки в "нуль" за $2n$ кроків (в момент $2n$). Оскільки число маршрутів, що з'єднують точки $(0;0)$ і $(2n;0)$ рівне $L(2n;0) = C_{2n}^n$, то $P_{2n} = C_{2n}^n \cdot \frac{1}{2^{2n}}$, а ймовірність першого повернення в "нуль" в момент $2n$ визначається залежністю $f_{2n} = P_{2n-2} - P_{2n}$, що при $n \geq 1$ має вигляд $f_{2n} = \frac{1}{2n} \cdot P_{2n-2}$.

Ймовірність повернення в "нуль" за $2n$ кроків буде визначатись залежністю
$$f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = 1 - P_{2n}.$$

Оскільки $P_{2n} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} f_{2k} = 1$.

Тобто, при нескінченному числі маршрутів (траекторій) ймовірність того, що частинка коли-небудь повернеться в "нуль" , рівна одиниці.

У підсумку зазначимо, що з ймовірністю 1 частинка нескінченне число разів потрапляє у будь-яку як завгодно віддалену точку (в тому числі і в "нуль"), але середній час очікування таких подій є нескінченно великий.

Слід відзначити, що аналіз випадкових блукань частинки на прямій лінії при наявності поглинаючого і відштовхуючого екранів висвітлений у [2].

Про симетричне випадкове блукання на площині і у просторі

Відповідь на питання можливості повернення блукаючої частинки в "нуль" у двовимірному і тривимірному випадках отримаємо, дослідивши поведінку ряду $\sum P_{2n}$.

У двовимірному випадку частинка за один крок може переміститись з однаковою ймовірністю $\frac{1}{4}$ у будь-якому напрямку: вперед, назад, вправо, вліво, причому незалежно від передісторії її блукання.

Загальне число маршрутів з початку координат буде визначатись залежністю

$$L(2n;2n) = \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = C_{2n}^{n} \cdot \left(C_n^k\right)^2,$$

отже,

$$P_{2n} = \left(C_{2n}^{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{4^{2n}}.$$

При великих n, згідно з формулою Стірлінга, отримаємо:

$$P_{2n} \sim \frac{1}{4^{2n}} \cdot \frac{2^{4n}}{\pi n} = \frac{1}{\pi n}.$$

Оскільки числовий ряд із загальним членом $\frac{1}{\pi n}$ є розбіжним, то робимо висновок, що у двовимірному випадку блукання є зворотним.

У тривимірному випадку послідовність переміщень в один із шести напрямів (вперед, назад, вправо, вліво, вверх, вниз) є довільна (випадкова), а поведінка ряду $\sum P_{2n}$ еквівалентна поведінці ряду $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$. Враховуючи, що у даному випадку ряд $\sum P_{2n}$ є збіжний, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{2n} < 1$, робимо висновок: ймовірність повернення в початок координат за $2n$ кроків при досить великих n є близькою до нуля.

У підсумку зазначимо:

1. При необмеженому збільшенні числа кроків ($n \to \infty$) властивість повернення в "нуль" для одновимірного симетричного випадкового блукання зберігається у двовимірному випадку та втрачається при більшому числі вимірів.

2. У двовимірному і тривимірному випадках, здійснюючи випадкові блукання по вузлах цілочисельної решітки, частинка швидко досягає будь-якого як завгодно віддаленого рівня, причому у просторі набагато швидше, оскільки повернення в "нуль" є малоймовірне.

3. Наведені результати дають змогу замінити велику кількість випадкових маршрутів у схемах випадкових блукань на один прямолінійний (граничний) у відповідності до фізичного змісту.

Метод прискорених статистичних випробувань

Ймовірнісні уявлення, що містяться в основі випадкових блукань, допомагають розвинути новий підхід до теорії скінченних методів.

Не ускладнюючи модель випадкових блукань, а вдосконаливши її, здійснюється природний перехід від дискретної схеми до неперервної. В ланцюжку, що з'єднує перехідну ймовірність, скінченно-різницевий аналог і диференціальне рівняння замінили середню ланку на скінченно-елементний аналог. Заміна апостеріорних перехідних імовірностей у схемі випадкових блукань апріорними та поєднання ймовірнісних ідей методу Монте-Карло і барицентричних координат симплексу звільняє від необхідності складати і розв'язувати великі системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Традиційне нанесення сітки на досліджувану область також стає непотрібним, досить передбачити переміщення симплекса, який транслює граничну інформацію в досліджувану точку (двовимірний варіант розглянуто в [3]). У тривимірному випадку пропонується варіант симплекс-елемента у формі тетраедра [4].

Цікаво відзначити, що історія розвитку науки супроводжувалась неухильним зростанням ролі ймовірнісних уявлень, що вносять узагальнення, порядок і простоту в ті питання, де традиційний детермінований підхід є безсилим. Теорія ймовірностей має рідкісну властивість формувати нову мову, стиль і вигляд наукового дослідження. Запровадження у теорію скінченних елементів нових понять, зокрема, блукаючої частинки, випадкового маршруту, середньої винагороди та інших дає змогу не тільки описати відомі факти та спростити зазначену кількість обчислювальних процедур, але й отримати нові результати.

[1] Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. *Введение в теорию вероятностей.* – М.: Наука, 1982. – 160 с.

[2] Гнеденко Б.В. *Курс теории вероятностей: Учебник.* – Изд. 6-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 448 с.

[3] Senychak V.M., Ovchar I.Y., Senychak V.V. *Solving Boundary Problems of Elliptic Type by Accelerated Method of Statistical Trials* // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2015. – №1(29). – С. 145-150.

[4] Сеничак В.М., Сеничак В.В. *Побудова базисних функцій тривимірного симплекс-елемента* // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2017. – №1(37). – С. 91-97.

Лідія Сергєєва

Побудова глобального розв'язку деякого неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними, що містить відхилення за часом

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: sergeevalms@gmail.com

Описано алгоритм побудови глобального розв'язку та наведено умови його існування для деякого неоднорідного рівняння з частинними похідними із відхиленням аргументу вигляду

$$u_t(x,t) = \int\limits_{-\mu}^{0} p(t,s)u_{xx}(x,t+s)ds + q(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

з нульовими крайовими умовами

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \; t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $Q = \{(x,t) : 0 < x < l, t \in \mathbb{R}\}$, $p(t,\cdot)$ при кожному $t \in \mathbb{R}$ вимірна, а $p(\cdot,s)$ при кожному $s \in [-\mu, 0]$ неперервна функція.

Було встановлено [1], що для відповідної однорідної задачі власні функції і власні значення мають відповідно вигляд

$$X_k(x) = sin\frac{k\pi x}{l}, \; \lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2, \; k = 1, ..., n,$$

з деяким $n \geq 1$.

Вводиться припущення, що функція $q(x,t)$ може бути представлена у вигляді суми перших n доданків ряду Фур'є:

$$q(x,t) = \sum_{k=1}^{n} q_k(t) sin\frac{k\pi x}{l}, \; q_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} q(\xi,t) sin\frac{k\pi\xi}{l} d\xi.$$

Глобальний розв'язок $u(x,t)$ задачі (1), (2) знайдено у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} X_k(x)T_k(t), \tag{3}$$

де $T_k(t)$ – розв'язок лінійного рівняння $T_k'(t) + \bar{p}_k(t)T_k(t) - \bar{q}_k(t) = 0$ із коефіцієнтами

$$\bar{p}_k(t) = \lambda_k \int\limits_{-\mu}^{0} p(t,s) e^{-\int\limits_{t}^{t+s} \bar{p}_k(r)dr} ds,$$

$$\bar{q}_k(t) = q_k(t) + \lambda_k \int\limits_{-\mu}^{0} \int\limits_{t+s}^{t} p(t,s)\bar{q}_k(\tau) e^{\int\limits_{t+s}^{\tau} \bar{p}_k(r)dr} d\tau ds,$$

де $k \le n,\ t \in \mathbb{R}$. Для знаходження коефіцієнтів $\bar{p}_k$ та $\bar{q}_k$ було застосовано метод послідовних наближень.

Отримано умови, при виконанні яких даний метод побудови глобального розв'язку (1), (2) є застосовним. Для цього доведено наступну теорему.

Теорема 8 *Нехай функція p задовольняє накладені вище умови,*

$$|p(t,s)| < \alpha, \quad \alpha = const, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in [-\mu, 0],$$

і виконується нерівність

$$\frac{1-\rho}{1+\rho}(\rho e^{\rho+1} + 1) < 1, \quad \rho = \sqrt{1 - \alpha\lambda_n\mu^2},$$

де n – ціла частина числа $0.8047425\frac{l}{\pi\sqrt{\alpha\mu}}$, *а* $\mu < \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda_n}}$.

Тоді існує глобальний розв'язок задачі (1), (2) *вигляду* (3).

Запропонований метод було використано при дослідженні деяких інших типів рівнянь [2], [3].

[1] Самойленко А.М., Сергєєва Л.М. *Побудова глобальних розв'язків рівнянь з частинними похідними, які містять відхилення по часу* // Нелінійні коливання. – 2014. – **17**, №4. – С. 489–502.

[2] Сергєєва Л.М. *Побудова глобального розв'язку для одного класу неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними, що містять відхилення за часом* // Буковинський математичний журнал. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2015. – **3**, №2. – С. 72–76.

[3] L.M. Sergeeva, *About global solutions of partial differential equation with deviating argument in the time variable* // ROMAI J. – 2015. – **v.11**, no.2 – pp. 109–118.

Василь Слюсарчук

Абсолютно нестійкі рівняння з післядією

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна
E-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

Нехай H – гільбертовий простір і $\|\cdot\|_H$ – норма в H, що визначається рівністю

$$\|x\|_E = \sqrt{(x, x)},$$

де (x, y) – скалярний добуток x на y ($x, y \in H$). Позначимо через $\operatorname{End} H$ банахову алгебру лінійних неперервних операторів $A : H \to H$ з одиницею I та нормою

$$\|A\|_{\operatorname{End} H} = \sup_{\|x\|_H = 1} \|Ax\|_H.$$

Нехай m – довільне натуральне число. Розглянемо самоспряжені оператори $A_n \in \operatorname{End} H$ і $B_n \in \operatorname{End} H$, $n = \overline{1, m}$, невід'ємні числа Δ_n, τ_n, $n = \overline{1, m}$, та диференціально-різницеві рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = B_0 x(t) + \sum_{n=1}^{m} B_n x(t - \Delta_n),\ t \geq 0, \tag{1}$$

і

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sum_{n=1}^{m} A_n \frac{dx(t - \tau_n)}{dt} = B_0 x(t) + \sum_{n=1}^{m} B_n x(t - \Delta_n),\ t \geq 0, \tag{2}$$

запізнювального та нейтрального типів відповідно.

Нульові розв'язки рівнянь (1) і (2) називаються *абсолютно нестійкими* по відношенню до відхилень Δ_n, τ_n, $n = \overline{1, m}$, якщо ці розв'язки нестійкі при всіх невід'ємних Δ_n і Δ_n, τ_n, $n = \overline{1, m}$, відповідно (означення нестійких розв'язків диференціальних рівнянь із відхиленнями аргументу можна знайти, наприклад, в [1, 2]).

Позначимо через $\sigma(A)$ спектр оператора $A \in \operatorname{End} H$, а через $\mathbb{C}_+$ – множину $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Теорема 9. *Для абсолютної нестійкості нульового розв'язку рівняння* (1) *необхідно і достатньо, щоб*

$$\sigma\left(\sum_{n=0}^{m} B_n\right)\bigcap \mathbb{C}_+ \neq \emptyset. \tag{3}$$

Теорема 10. *Нехай*

$$\sum_{n=1}^{m} \|A_n\|_{\mathrm{End}\, H} < 1$$

і

$$\left(\sum_{n=1}^{m} p_n A_n\right)\left(B_0+\sum_{n=1}^{m} q_n B_n\right)=\left(B_0+\sum_{n=1}^{m} q_n B_n\right)\left(\sum_{n=1}^{m} p_n A_n\right)$$

для всіх $p_n \in [0,1]$, $q_n \in [0,1]$, $n=\overline{1,m}$.

Для абсолютної нестійкості нульового розв'язку рівняння (2) *необхідно і достатньо виконання співвідношення* (3).

Зауваження 1. *Якщо в рівняннях* (1) *і* (2) *операторні коефіцієнти не є самоспряженими, то твердження теорем 1 і 2 є хибними навіть тоді, коли* $\dim H = 2$.

Зауваження 2. Теореми 1 і 2 аналогічні відповідним твердженням про необхідні та достатні умови абсолютної нестійкості розв'язків лінійних скалярних диференціально-різницевих рівнянь, отриманих автором в [1] та [3]. У цих працях також наведено достатні умови абсолютної нестійкості розв'язків лінійних систем диференціально-різницевих рівнянь запізнювального типу.

Достатні умови нестійкості розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі зі скінченим числом довільних неперервно залежних від часу запізнень отримано в [1].

[1] Слюсарчук В. Ю. *Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією.* – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2003. – 366 с.

[2] Слюсарчук В. Ю. *Нестійкість розв'язків еволюційних рівнянь.* – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2004. – 416 с.

[3] Слюсарчук В. Ю. *Умови абсолютної нестійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь* // Нелінійні коливання. – 2007. – **7**, № 3. – С. 430–436.

Людмила Слюсарчук

Диференціально-різницеві рівняння з асимптотично сталими розв'язками

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна
E-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

Нехай E – банаховий простір скінченої розмірності з нормою $\|\cdot\|_E$, $\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел, $\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел, $n \in \mathbb{N}$, $F : E \to E$ – C^0-відображення і $\varphi : E^2 \to E$ – C^1-відображення.

Розглянемо диференціально-різницеве рівняння

$$\frac{d(x(t+1) - \varphi(x(t), x(t-1)))}{dt} =$$
$$= F(x(t) - \varphi(x(t-1), x(t-2))),\ t \geqslant 0. \tag{1}$$

Наведемо умови, коли всі розв'язки рівняння (1) є асимптотично сталими.

Будемо вважати, що відображення F задовольняє умови:
1) $F(0) = 0$;
2) нульовий розв'язок диференціально-різницевого рівняння

$$\frac{dz(t)}{dt} = F(z(t-1)),\ t \geqslant 0, \tag{2}$$

є глобально асимптотично стійким, тобто нульовий розв'язок рівняння (2) є стійким за Ляпуновим [1] і для кожного розв'язку $z = z(t)$ цього рівняння

$$\lim_{t \to +\infty} \|z(t)\|_{\mathbb{R}^n} = 0. \tag{3}$$

У випадку виконання цих умов дослідження розв'язків диференціально-різницевого рівняння (1) зводиться до дослідження розв'язків різницевого рівняння

$$u(t+1) - \varphi(u(t), u(t-1)) = z(t), \quad t \geqslant 0,$$

права частина якого є розв'язком рівняння (2) і виконується співвідношення (3).

Справджується наступне твердження.

Теорема 11. *Нехай відображення F задовольняє умови 1 і 2. Якщо для деякої сталої $q \in [0,1)$ для відображення φ справджується співвідношення*

$$\|\varphi(x_1,x_2)-\varphi(y_1,y_2)\|_E \leqslant$$

$$\leqslant q\max\{\|x_1-y_1\|_E, \|x_2-y_2\|_E\}\,, \quad x_1,x_2,y_1,y_2 \in E, \tag{4}$$

то кожний неперервно диференційовний розв'язок $x = x(t)$ рівняння (1) є асимптотично сталим і

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = a,$$

де a – така точка, що

$$\varphi(a,a) = a. \tag{5}$$

Зауваження 1. У теоремі 1 точка a, що задовольняє (5), єдина і ця теорема є узагальненням відповідного твердження з [2].

Зауваження 2. Твердження теореми 1 зберігається, якщо в рівнянні (1) вирази $x(t+1)-\varphi(x(t),x(t-1))$ і $x(t)-\varphi(x(t-1),x(t-2))$ замінити на

$$x(t+1)-\psi(x(t),x(t-1),\ldots,x(t-m+1))$$

і

$$x(t)-\psi(x(t-1),x(t-2),\ldots,x(t-m)))$$

відповідно, де $m \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ і $\psi : E^m \to E$ – C^1-відображення, а співвідношення (4) і (5) замінити на

$$\|\psi(x_1,x_2,\ldots,x_m)-\psi(y_1,y_2,\ldots,y_m)\|_E \leqslant$$

$$\leqslant q\max\{\|x_1-y_1\|_E, \|x_2-y_2\|_E,\ldots,\|x_m-y_m\|_E\}\,,$$

де $x_1,x_2,\ldots,x_m \in E,\ y_1,y_2,\ldots,y_m \in E$, і

$$\psi(a,a,\ldots,a) = a$$

відповідно.

[1] Слюсарчук В. Ю. *Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією.* – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2003. – 366 с.

[2] Слюсарчук Л. М. *Нелінійні диференціально-різницеві рівняння з асимптотично сталими розв'язками* // Буковинський математичний журнал. – 2016. – **4**, № 1–2. – С. 143–144.

Олена Смалько

Перспективні технології зберігання комп'ютерної інформації

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, Україна
E-mail: smalko.olena@kpnu.edu.ua

Важливість досліджень нових технологій зберігання даних переоцінити важко, оскільки люди сучасної інформаційної епохи постійно стикаються з необхідністю надійного збереження різноманітної інформації, повідомлень, відомостей у цифровому форматі.

Найбільш перспективними є наукові розробки, практична реалізація яких гарантуватиме користувачам довготермінове зберігання даних на компактних носіях помірної вартості. Але науковий інтерес становлять всілякі, навіть дуже несподівані ідеї, теоретичні дослідження та експериментальний досвід, який згодом може спричинити відкриття і розвиток продуктивних технологій, що завоюють популярність і просунуть уперед IT-галузь.

Досі на ринку комп'ютерної техніки присутні накопичувачі на магнітних носіях, і лише прогресивні технології дозволять їм втримати свої позиції. Наприклад, технології, які забезпечують високу щільність запису: теплоприсутнього магнітного запису (англ. Heat-assisted magnetic recording), що полягає у локальному нагріванні лазером і перемагнічуванні в процесі запису поверхні пластин жорсткого диска; черепичного магнітного запису (Shingled magnetic recording), що передбачає використання часткового накладення інформаційних доріжок одна на іншу за принципом черепиці; мікрохвильового магнітного запису (Microwave assisted magnetic recording), який досягається завдяки використанню явища феромагнітного резонансу; біт-структурованого запису (Bit-Patterned Media Recording), за якого завдяки нанолітографії магнітне середовище розбивається на масиви однакових комірок (точок), кожна з яких зберігає один біт даних. Але найширші перспективи магнітним носіям може відкрити технологія багаторівневого 3D-запису (Multilevel 3D magnetic recording), у якій замість одного магнітного шару пропонується використовувати три, між якими розміщується ізолятор [2].

Розробляються також різноманітні формати багатошарових оптичних дискових носіїв [7], у тому числі флуоресцентні і голографічні, які підтримують високу щільність запису даних. Наприклад, цифрові багатошарові диски, що виготовляються компанією "D Data Inc." , складаються з великої кількості майже прозорих шарів даних, до яких додається флуоресцентний матеріал. Їх покривають спеціальними хімічними сполуками, що реагують коли червоний лазер освітлює певний шар. При цьому відбувається хімічна реакція, яка генерує сигнал, що потім зчитується з диска. Такі диски потенційно можуть вміщувати до 100 гігабайт даних.

Ще більший обсяг інформації можна вмістити на дисковий носій при використанні не одного, а двох променів лазера, що доповнюють один одного. На перетині променів утворюється пляма, діаметр якої можна зробити набагато меншим, ніж діаметр кожного з двох променів. Таким чином на диску можна пропалити отвори меншого діаметра. Китайським дослідникам, наприклад, вдалось досягти розміру пропаленого отвору в інформаційному шарі оптичного носія біля 9 нм [4]. Подібні технології за умови їх вдалої практичної реалізації дозволять значно збільшити ємність одного диска – в теорії до 1000 терабайт.

Нові типи голографічних запам'ятовуючих пристроїв використовують інтерференцію спінових хвиль (магнонів) замість світлових променів, що може забезпечити велику ємність, доступну для зберігання даних [5]. Окрім підвищеної щільності запису і високої швидкості зчитування інформації з голографічної пам'яті її характеризує ще й тривалий термін служби – залежно від використовуваних матеріалів він становить від 10 до 100 років.

А британські вчені завдяки використанню наноструктурованого кварцового скла і спеціального високочастотного лазера, що працює у фемтосекундному діапазоні частот (з довжиною хвилі 1030 нм, імпульсами по вісім мікроджоулів тривалістю 280 фемтосекунд із частотою 200 кГц), досягли і надзвичайно високої щільності запису даних на диск (ємність носія 360 терабайт), і термічної його стабільності (диск витримує температуру до 1000°C), і практично необмеженого терміну служби за кімнатної температури (мільярди років) [8].

Що стосується твердотілих накопичувачів, то їх популярність серед користувачів також напряму залежить від розвитку технологій, завдяки яким збільшується ємність і термін використання відповідних носіїв, а також підвищується рівень продуктивності роботи із ними комп'ютерної системи.

Європейські та російські вчені [3] досліджують можливості використання коротких електромагнітних імпульсів, частота випромінювання яких вимірюється в терагерцах, що мають довжини хвиль близько 0,1 міліметра, для збільшення швидкості переключення комірок пам'яті. Вже встановлено, що ефект від терагерцевого випромінювання у 10 разів кращий, ніж за традиційного зовнішнього магнітного впливу. Ця альтернатива магнітного поля може у перспективі допомогти створювати надшвидкісну комп'ютерну пам'ять.

На часі використання і нанотехнологій. Японські компанії вже розпочали комерційне виробництво енергонезалежної пам'яті Nano-RAM з довільним доступом на основі вуглецевих нанотрубок, розміщених на чипоподібних електронних компонентах [6].

Більшою швидкістю роботи, економічністю, довговічністю і щільністю запису даних відрізняються від поширених у наш час флешносіїв нові накопичувачі тривимірної флеш-пам'яті, технології виготовлення якої ґрунтуються на вертикальному компонуванні блоку комірок на кристалі. Але останнім часом ведуться активні дослідження технологій створення пам'яті, що використовують унікальну здатність халькогенідних напівпровідників "перемикатися" при нагріванні між двома станами: кристалічним і аморфним [1]. Цілком можливо, що пам'ять на основі фазових переходів (Phase-change memory) потіснить на ринку позиції дискових накопичувачів і складе достойну конкуренцію флеш-пам'яті.

У світі високих технологій та науки знаходяться прихильники найрізноманітніших ідей для вирішення насущних проблем, пов'язаних зі зберіганням цифрових даних. Останнім часом, наприклад, проводяться активні експериментальні дослідження, в яких у якості структурних елементів запам'ятовуючих пристроїв використовують об'єкти біологічного походження. Досвід, здобутий у подібних наукових розвідках, неодмінно збагатить вчених як інтелектуально, так і технологічно, а також дасть поштовх для розвитку досліджень, конче потрібних людству.

[1] Богословский Н. А., Цэндин К. Д. *Физика эффектов переключения и памяти в халькогенидных стеклообразных полупроводниках* // Физика и техника полупроводников. – 2012. – **Том 46**, вып.5. – С. 577-608. – Режим доступа: http://journals.ioffe.ru/articles/viewPDF/7691.

[2] *Хранение данных: Какое будущее нас ждет.* – Режим доступа: https://habrahabr.ru/company/1cloud/blog/281563.

[3] Baierl S., Hohenleutner M., Kampfrath T., Zvezdin A. K., Kimel A. V., Huber R., Mikhaylovskiy R. V. *Nonlinear spin control by terahertz-driven anisotropy fields* // Nature Photonic. – 2016. – **Vol.10**. – pp. 715-718. – Mode of access: http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2016.181.

[4] Gan Z., Cao Y., Evans R. A., Gu M. *Three-dimensional deep subdiffraction optical beam lithography with 9nm feature size* // Nature Communications. – 2013. – **Vol.4**. – p. 2061. – Mode of access: http://dx.doi.org/10.1038/ncomms3061.

[5] Gertz F., Kozhevnikov A., Filimonov Y., Khitun A. *Magnonic Holographic Memory.* – Mode of access: https://arxiv.org/abs/1401.5133.

[6] Press release. *Fujitsu Semiconductor and Mie Fujitsu Semiconductor license Nantero's NRAM and have begun developing breakthrough memory products for multiple markets.* – Mode of access: http://www.fujitsu.com/jp/group/fsl/en/resources/news/press-releases/2016/0831.html.

[7] Xu D. *Multi-dimensional Optical Storage.* – Singapore: Springer, 2016. – 692 p.

[8] Zhang J, Gecevičus M, Beresna M., Kazansky P. G. *5D Data Storage by Ultrafast Laser Nanostructuring in Glass.* – Mode of access: http://www.orc.soton.ac.uk/fileadmin/downloads/5D_Data_Storage_by_Ultrafast_Laser_Nanostructuring_in_Glass.pdf.

Тетяна Сопронюк

Про здобутки студентів кафедри

ЧНУ імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: t.sopronyuk@chnu.edu.ua

Кафедра прикладної математики та інформаційних технологій за 55 років підготовила понад 1300 фахівців. Наші випускники працюють у відомих комп'ютерних фірмах України, Нідерландів, Канади, Німеччини, Польщі, США та інших країнах світу. Випускники кафедри складають вагому частку кадрового складу фірм, що спеціалізуються на розробці програмного забезпечення та мають представництва в м. Чернівці, зокрема в: SoftServe, SharpMinds, Global IT Support, OSF Global Services, Yukon-Software, Desyde ltd, eBizAutos, Additiv, Svitla Systems, Inc та інших.

Наші студенти підвищують свій професійний рівень на курсах і академіях, які організовуються цими фірмами, а студенти старших курсів – працюють на відповідних посадах.

Студенти кафедри беруть активну участь студентських конференціях, в олімпіадах з програмування і прикладної математики, неодноразово були призерами Всеукраїнських олімпіад та Всеукраїнських конкурсів студентських наукових робіт.

Їх дипломні і магістерські роботи охоплюють різні напрямки прикладної математики, математичного і комп'ютерного моделювання, сучасних інформаційних технологій.

Пропонуємо вашій увазі неповних перелік результатів досліджень, проведених студентами кафедри прикладної математики та інформаційних технологій за 5 останніх років:

2012 рік.

- створено систему відеоспостереження на основі IP-камер;
- реалізовано алгоритми для роботи з потоками JPEG та MJPEG;
- розроблено програмні засоби B-сплайнової апроксимації кривих та поверхонь;
- досліджено математичні моделі поширення епідемій зі степеневими функціями передачі інфекції та із запізненням;

- створено Web-систему обробки списків посилань;
- розроблено інформаційне і програмне забезпечення підсистеми обліку подачі сировини на переробку на цукровом у заводі;
- проведено дослідження впливу вентиляції на форму тонких осесиметричних каверн.

2013 рік.

- створено Web-додаток для голосового введення наукових текстів з використання тех формул;
- розроблено математичні моделі ізольованих популяцій із запізненням розвитку;
- описано поліноміальну мінімізацію частково визначених булевих функцій;
- проведено розробку сервісу інформування про події;
- досліджено умови існування та стійкісті стаціонарного розв'язку хронічної форми відповіді імунної системи в моделі Г.І. Марчука;
- створено он-лайн інтерактивну дошку;
- розроблено Web-систему керування діагностичним центром;
- досліджено модель Хатчінсона із запізненням нейтрального типу;
- розроблено систему документування успішності студентів факультету прикладної математики;
- розширено шейдерний маппінг в 3D-графіці;
- досліджено чутливість методу найменших квадратів до збурень в нетеровій крайовій задачі.

2014 рік.

- досліджено одну динамічну гру зближення-відхилення при наявності фазових обмежень;
- виконано математичне моделювання вірусного гепатиту В;
- описано біфуркації Хопфа в моделях із запізненням та математичні моделі відповіді імунної системи із змінним запізненням;
- розвинуто алгоритми відсікання геометричних об'єктів на площині;

- досліджено алгоритми згортальних кодів;
- описано мінімізацію булевих функцій в класі кон'юнктивних нормальних форм та пошук оптимальних поліноміальних зображень булевих функцій;
- розроблено компонент для пошуку дублікатів за допомогою метасимволів та пошуку нечітких дублікатів за допомогою алгоритму шинглів;
- побудовано мережеву систему для перегляду інформаційних звітів про успішність студентів;
- створено web-сервіс для системи дистанційного навчання та інформаційну систему обслуговування бібліотеки.

2015 рік.

- створено систему контролю відвідувань студентів та автоматичного ведення журналу планування та обліку громадсько-виховної роботи;
- розроблено мобільний додаток під платформу Android для взаємодії з соціальною мережею Facebook та картами Google Maps;
- розроблено мобільний додаток під платформу iOS, який реалізує функціонал пошуку та збору даних про підприємства, заклади, визначні місця та надає до них оффлайн-доступ;
- проведено математичне моделювання взаємодії імунної системи організму з чинниками зовнішнього впливу;
- досліджено динаміку регулярної і хаотичної поведінки економічних систем;
- проведено аналіз математичних моделей тривидових систем;
- побудовано багатокрокові різницеві схеми із змінним кроком та їх застосування в екологічних моделях;
- розроблено алгоритми обробки растрових зображень;
- побудовано багатокрокові різницеві схеми із змінним кроком та застосовано їх в екологічних моделях;
- розроблено засоби автоматизації обміну даними для типових конфігурацій (засобами системи "1С:Підприємство 8.2", MS Excel та VBA;

- побудовано різницеві схеми для диференціальних рівнянь четвертого порядку та розроблено програмне забезпечення для їх реалізації;
- розроблено сервіс онлайн-оголошень;
- автоматовано ведення відомостей рубіжного контролю;
- досліджено форми донних штучних осесиметричних каверн;
- розроблено програмне забезпечення системи підтримки електронних медичних карт.

2016 рік.

- розроблено Interactive Shiny Application для розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь;
- автоматизовано процесс візуальної побудови недетемінованого скінченого автомату;
- створено систему автоматизованого тестування лабораторних робіт з теорії імпульсних систем;
- реалізовано автоматичну морфологічну розмітка тексту;
- створено онлайн-сервіс навчання студентів;
- побудовано програмне забезпечення для побудови остовних дерев графа із заданими властивостями;
- розроблено та впроваджено Web-додаток для різнокритеріальної мінімізації повністю визначених булевих функцій у класі диз'юнктивних нормальних форм.
- проведено узагальнення математичної моделі імунної відповіді організму людини;
- продемонстровано застосування автоматизованого тестування;
- досліджено математичну модель конкуренції декількох інноваційних підприємств із врахуванням часового запізнення.

Іван Тимків

Задача з багатоточковими умовами для параболічного рівняння з факторизованим оператором зі змінними коефіцієнтами

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна
E-mail: tymkiv_ if@ukr.net

Нехай $L = -\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, — диференціальний вираз, коефіцієнти $p_{ij}(x), q(x)$, $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, якого є додатними і досить гладкими в обмеженій області $G \subset \mathbb{R}^p$ з гладкою межею ∂G; $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$, — додатні власні значення задачі $LX + \lambda X = 0$, $X|_{\partial G} = 0$, яким відповідає повна ортонормована система власних функцій $\{X_k(x) : k \in \mathbb{N}\}$; $E_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, — простір функцій $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$ зі скінченною нормою $\|\varphi; E^b_{\alpha,\beta}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 \lambda_k^{2\alpha} \exp(2\beta\lambda_k)}$.

В області $D = (0, T) \times G$ розглянемо задачу

$$\prod_{q=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} + a_q(t)L\right)u(t,x) = f(t,x), \tag{1}$$

$$\sum_{r=0}^{N_j} c_r^j(L)\frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}\Big|_{t=t_j} = \varphi_j(x),\ 0 \le N_j \le n-1, j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{2}$$

$$L^m u(t,x)\Big|_{\Sigma} = 0,\ m \in \{0, 1, \ldots, (\theta-1)\}, \quad \Sigma = [0,T] \times \partial G, \tag{3}$$

де $a_q(t) \in C^{n-q}([0,T])$, $a_q(t) > 0$, $a_q(t) \neq a_j(t)$, $q \neq j$, $t \in [0,T]$, $q, j \in \{1, \ldots, n\}$; $c_r^j(L) = \sum\limits_{i=0}^{M} c_{r,i}^j L^i$, $c_{r,i}^j \in \mathbb{C}$, $M \in \mathbb{N}$, $c_{0,M}^j \neq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $0 \le t_1 < \ldots < t_n \le T$, $\theta = \max\{n, M\}$.

Для того щоб встановити коректну розв'язність задачі (1) – (3) позначимо: $I_0(t) := 0$, $I_j(t) = -\int\limits_0^t a_j(\tau)d\tau$, $\Theta_{j,k}(t) = \exp((I_j(t) - I_{j-1}(t))\lambda_k)$, $j \in \{1,\ldots,n\}$;

$u_{k,1}(t) = \Theta_{1,k}(t)$, $u_{k,2}(t) = \Theta_{1,k}(t)\int\limits_0^t \Theta_{2,k}(\xi_1)d\xi_1$, $u_{k,3}(t) = \Theta_{1,k}(t)\int\limits_0^t \left(\Theta_{2,k}(\xi_1)\int\limits_0^{\xi_1} \Theta_{3,k}(\xi_2)d\xi_2\right)d\xi_1$, $\ldots$, $u_{k,n}(t) = \Theta_{1,k}(t)\times \times\int\limits_0^t \Theta_{2,k}(\xi_1)\ldots\left(\int\limits_0^{\xi_{n-2}} \Theta_{n,k}(\xi_{n-1})d\xi_{n-1}\right)\ldots d\xi_1$; $d = N_1 + \ldots + N_n - \max\limits_{j\in\{1,\ldots,n\}} N_j + nM$, $A_1 = \max\limits_{1\le j\le n-1}\left\{\max\limits_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t (a_j(\tau) - a_{j+1}(\tau))d\tau\right\}$, $A_2 = \max\limits_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t a_n(\tau)d\tau$, $A_3 = \max\limits_{1\le j\le n}\max\limits_{t\in[0,T]}\{a_j(t)\}$.

Характеристичний визначник задачі (1) — (3) зображується формулою

$$\Delta(k,\vec{t}) = \det\left\|\sum_{r=0}^{N_j} c_r^j(\lambda_k)u_{k,q}^{(r)}(t_j)\right\|_{j,q=1}^{n}, \quad \vec{t} = (t_1,\ldots,t_n).$$

Теорема 12 *Для єдиності розв'язку задачі* (1) — (3) *у просторі* $C^n\left([0,T];E_{\alpha,\beta}\right)$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k\in\mathbb{N} \quad \Delta(k,\vec{t}) \ne 0. \tag{4}$$

Теорема 13 *Нехай виконується умова* (4) *та існують сталі* $\omega,\nu\in\mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k\in\mathbb{N}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k,\vec{t})| > \lambda_k^{-\omega}\exp(-\nu\lambda_k). \tag{5}$$

Якщо $f\in C\left([0,T];E_{\alpha_1,\beta_1}\right)$, $\varphi_j\in E_{\alpha_1,\beta_2}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_1 = \alpha+\omega+d+n$, $\beta_1 = \beta+\nu+n(n-1)A_1/2$, $\beta_2 = \beta_1+(n-1)A_1+A_2$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1) — (3) *з простору* $C^n\left([0,T];E_{\alpha,\beta}\right)$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* f *та* φ_j, $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Теорема 14 *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^n$*) векторів* $(c_{0,M}^1,\ldots,c_{0,M}^n)$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t}\in[0,T]^n$ *нерівність* (5) *виконується при* $\omega > n^2p/4-nM$, $\nu = n(n+1)A_3T/2$.

Отримані результати доповнюють дослідження, проведені в [1, 2].

[1] Пташник Б. И. *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.* – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[2] Тимків І. Р. *Багатоточкова задача для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами* // Карпатські математичні публікації. – 2011. – **3**, №2. – С. 120–130.

Володимир Федорчук

Моделювання лінійно протяжних неоднорідних об'єктів з розподіленими параметрами на основі застосування оборотних комп'ютерних моделей

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський, Україна
E-mail: fedvolod@gmail.com

Розв'язування задач проектування, керування, контролю чи діагностики складних динамічних систем на сучасному етапі розвитку комп'ютерних технологій нерозривно пов'язане з використанням методів математичного та комп'ютерного моделювання. Для систем, які складаються з неоднорідних елементів (з фізичними параметрами, які відрізняються на деяких ділянках), значні труднощі виникають при моделюванні ланок з розподіленими параметрами [1]. Створення адекватних математичних моделей складних динамічних систем з урахуванням розподіленості параметрів окремих ланок, а також вимог щодо ефективної комп'ютерної реалізації отриманих моделей є на сьогоднішній час далеко невирішеною і актуальною задачею. При комп'ютерному моделюванні об'єктів з розподіленими параметрами, математичні моделі яких, зазвичай, подаються у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними, виникає необхідність зведення їх до такого виду, який дає змогу використовувати у програмних засобах моделювання стандартні операційні блоки.

Розглянемо математичний опис об'єкта з розподіленими параметрами у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних

$$a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - b\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + d\cdot u(x,t) = f(x,t) \tag{1}$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} u(x_0,\, t) \;=\; \varphi_0(t); u(x_0+l,\; t) = \;\varphi_l(t); (t_0 \;\le\; t \le T), \\ u(x,\; t_0) \;=\; \psi_0(x); u(x,\; T) = \;\psi_T(x); (x_0 \;\le\; x \le x_0+l), \end{cases} \tag{2}$$

де $\varphi_0(t)$, $\varphi_l(t)$, $\psi_0(x)$, $\psi_T(x)$ — задані функції.

Застосувавши метод прямих до рівнянь (1)—(2), отримаємо систему з n звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку та нехтуючи членами $O(h^2)$ і позначивши через $U_k(t)$ наближені значення розв'язку $u(t,x)$ на прямій $x = x_k$ для їх визначення, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{gathered} a_k(t)\ddot{U}_k(t) - \frac{b_k(t)}{h^2}[U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] + c_k(t)\dot{U}_k(t)+ \\ + d_k(t)U_k(t) = f_k(t), \quad (k = 1, 2, ..., n). \end{gathered} \tag{3}$$

Використовуючи граничні умови, маємо:

$$\begin{cases} U_0(t) = \varphi_0(t), (0 \le t \le T); \\ U_{n+1}(t) = \varphi_l(t), (0 \le t \le T); \\ U_k(t_0) = \psi_0(x_k), U_k(T) = \psi_T(x_k); (k = 1, 2, ..., n). \end{cases} \tag{4}$$

Отже, отримана модель у вигляді системи рівнянь (3) з граничними умовами (4) апроксимує з точністю до $O(h^2)$ диференціальне рівняння (1) з граничними умовами (2). Слід відзначити, що за допомогою методу прямих проводиться декомпозиція вихідної моделі на n структурних елементів, кожен з яких реалізує диференціальне рівняння другого порядку. Для числової реалізації отриманої апроксимаційної моделі використовується simulink-модель, яка складається з n блоків, кожен з яких реалізує відповідне диференціальне рівняння системи (3). Особливістю цієї системи рівнянь є те, що кожне із рівнянь пов'язане з двома сусідніми рівняннями через функції $U_{k+1}(t)$ та $U_{k-1}(t)$, тому кожен блок, що реалізує k-те рівняння має один вихід $U_k(t)$, та два входи, на які подаються, відповідно, $U_{k+1}(t)$ та $U_{k-1}(t)$. Це зумовлює присутність в моделі прямих і зворотних зв'язків, які дають змогу встановити причинно-наслідкові залежності від першого блоку до останнього і навпаки, тобто simulink-модель внаслідок цього володіє властивістю оборотності.

Слід зауважити, що рівняння системи (3) описують поведінку дискретних елементів, на які розбивається неперервний протяжний об'єкт з розподіленими параметрами. Наприклад, для протяжного однорідного стержня, який зазнає деформації розтягу-стиску і описується моделлю (1) апроксимаційна модель (3), фактично, відображає систему n зосереджених мас, зв'язаних між собою пружними зв'язками. При цьому складові моделі (3) мають конкретний фізичний зміст: перший доданок відображає силу інерції, другий – силу пружності, третій – силу опору руху і т. д. Тому для неоднорідних об'єктів можна змінювати параметри окремих рівнянь моделі, а також у кожне із рівнянь вносити додатково нелінійні залежності, які можна легко реалізувати у відповідній підсистемі simulink-моделі. Наприклад, якщо сила опору руху для k-того елементу залежить від квадрату його швидкості, то в simulink-моделі це відображається співвідношенням, де $f_k(t) = \mu(\dot{U}_k(t))^2$, μ – деяка постійна величина. Отримана комп'ютерна модель, завдяки властивості оборотності, дає змогу здійснювати вхідні впливи та отримувати відгуки в будь-яких точках дискретизації лінійно протяжного об'єкта.

Прикладом ефективного застосування оборотних комп'ютерних моделей може бути створена за описаною вище методикою модель бурильної колони бурової установки. Модель дає змогу відображати поздовжні коливання та обертальний рух колони, а також складний процес взаємодії долота із забоєм. Керуючими впливами на процес буріння є сила, прикладена зі сторони лебідки через талеву систему та момент сили зі сторони роторного столу. При цьому враховується: неоднорідність бурової колони внаслідок використання різнотипних бурильних труб; деформація бурової вишки при навантаженні та її інертність; сили опору, викликані взаємодією промивної рідини зі стінками колони; виштовхувальна сила та інерція стовпа промивної рідини; сили опору при взаємодії долота з породою.

Побудована simulink-модель дала змогу розв'язати (у випадку неоднорідної за типорозмірами бурильних труб колони) ряд практичних задач, а саме: розраховувати у часі як зміщення долота за відомими зміщенням верхнього кінця колони і силою зі сторони талевої системи, так і кут його повороту за відомими обертальним моментом і кутом повороту ротора; обчислювати силу удару зубців шарошки за відомими обертальним моментом ротора та силою в точці підвісу талевої системи; розраховувати зміну моменту сили опору долота відносно сили, прикладеної до верхнього кінця колони та моменту сили роторного столу; обчислювати динаміку сил та моментів у різьбових з'єднаннях колони тощо. Розв'язання зазначених задач дає можливість комплексної оцінки динаміки бурильної колони під час буріння та спуско-підйомних роботах.

Отже, результати моделювання свідчать, що отримана структурна модель може використовуватись як на стадії проектування обладнання бурової установки, так і на стадії компонування бурильної колони. Крім того, модель може використовуватись в системі керування при проходці свердловини для підтримки оптимальних режимів буріння та для оптимізації спуско-підйомних робіт.

[1] Верлань А. Ф., Федорчук В. А. *Моделі динаміки електромеханічних систем.* – Київ: Наук. Думка, 2013. – 222 с.

Микола Філіпчук, Ольга Філіпчук

Емулятор машини з необмеженими регістрами

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
E-mail: filko@ukr.net

Машина з необмеженими регістрами (МНР) [1, 2] - абстрактна обчислювальна машина, одна з формалізацій поняття алгоритму.

МНР містить безліч *регістрів* $R_1, R_2, R_3, \ldots$, у кожний момент часу в яких зберігаються деякі цілі невід'ємні числа $r_1, r_2, r_3, \ldots$ відповідно:

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	$\ldots$
r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	$\ldots$

МНР може змінювати вміст регістрів при виконанні певної *команди*. Скінченний пронумерований перелік команд утворює *програму*. Команди програми послідовно нумеруються числами $1, 2, 3, \ldots$.

МНР сприймає команди наступних чотирьох типів:

1) *команду занулення* $Z(n)$, яка є вказівкою занулити вміст регістру R_n ($r_n := 0$);

2) *команду додавання одиниці* $S(n)$, яка є вказівкою збільшити вміст регістру R_n на 1 ($r_n := r_n + 1$);

3) *команду переадресації* $T(m, n)$, яка є вказівкою замінити вмістом регістру R_m вміст регістру R_n ($r_n := r_m$);

4) *команду умовного переходу* $J(m, n, q)$, яка є вказівкою порівняти вміст регістрів R_m та R_n, після чого у випадку $r_n = r_m$ перейти до виконання команди програми з номером q, а у випадку $r_n \neq r_m$ – до виконання наступної команди програми (IF $r_n = r_m$ GOTO q). При цьому спроба переходу до неіснуючої команди викликатиме зупинку машини.

МНР, як і будь-який алгоритм, при виконанні заданої програми працює тактами (кроками).

Для кожного такту послідовність чисел $r_1, r_2, r_3, \ldots$ у відповідних регістрах називається *конфігурацією* МНР.

Перший такт для заданої *початкової* конфігурації – виконання команди з номером 1. Далі послідовно виконуватимуться команди з номерами 2, 3, і т.д. Цей природний послідовний порядок виконання команд триватиме до тих пір, поки не зустрінеться команда умовного переходу $J(m, n, q)$, яка може його змінити.

Якщо в процесі виконання програми виникає ситуація, що чергова команда відсутня (тобто слід виконувати неіснуючу команду), то виконання програми завершується і МНР зупиняється. Конфігурація МНР після її зупинки називається *кінцевою*, а відповідний вміст регістру R_1 (число r_1) вважається *результатом* роботи МНР.

Аналогічно машині Тюрінга, МНР дозволяє здійснювати обчислення часткових числових функцій $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, аргументи і значення яких є цілими невід'ємними числами. При цьому початкова конфігурація формується наступним чином: $r_1 = x_1$, $r_2 = x_2$, $\ldots$, $r_n = x_n$, а значеннями решти регістрів є нулі. Після зупинки МНР вмістом регістру R_1 (результатом) має бути значення $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Якщо ж значення $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не визначене, то МНР повинна працювати безупинно.

Приклад досить простої програми [1, 2] для обчислення функції $f(x, y) = x + y$:

1. $J(2, 3, 5)$
2. $S(1)$
3. $S(3)$
4. $J(1, 1, 1)$

Приклад нетривіальної програми, складеної авторами даної праці, для обчислення функції $f(x) = x!$:

1. $T(1, 6)$	11. $S(3)$
2. $Z(1)$	12. $S(5)$
3. $J(1, 6, 20)$	13. $J(1, 1, 10)$
4. $S(1)$	14. $Z(3)$
5. $Z(3)$	15. $S(4)$
6. $Z(4)$	16. $J(1, 1, 9)$
7. $Z(5)$	17. $T(5, 1)$
8. $S(2)$	18. $J(2, 6, 21)$
9. $J(2, 4, 17)$	19. $J(1, 1, 5)$
10. $J(1, 3, 14)$	20. $S(1)$

Vочевидь, ефективні аналіз та тестування будь-яких нетривіальних програм можливі лише при використанні якого-небудь емулятора МНР. Крім цього, емулятор було б зручно використовувати в навчальному процесі як наглядний демонстраційний та контролюючий засіб.

Враховуючи ці аспекти, одним із авторів даної праці було створено Web-емулятор МНР. Реалізація емулятора виконана засобами HTML 5, CSS 3 та JavaScript.

Створений емулятор має дружній, інтуїтивно зрозумілий інтерфейс користувача та надає наступні можливості:

1) режим конструктора команд для формування програми МНР;

2) режим імпорту існуючого коду програми МНР;

3) можливість модифікації сформованої чи імпортованої програми МНР;

4) візуалізацію регістрів і задання потрібної початкової конфігурації МНР;

5) завантаження заданих початкової конфігурації та відповідної програми МНР в пам'ять емулятора для подальшого виконання;

6) покрокове ручне чи повне автоматичне виконання програми МНР;

7) візуалізацію всіх відповідних конфігурацій МНР в процесі виконання програми;

8) підрахунок кількості виконаних комад;

9) демонстрацію результату роботи МНР;

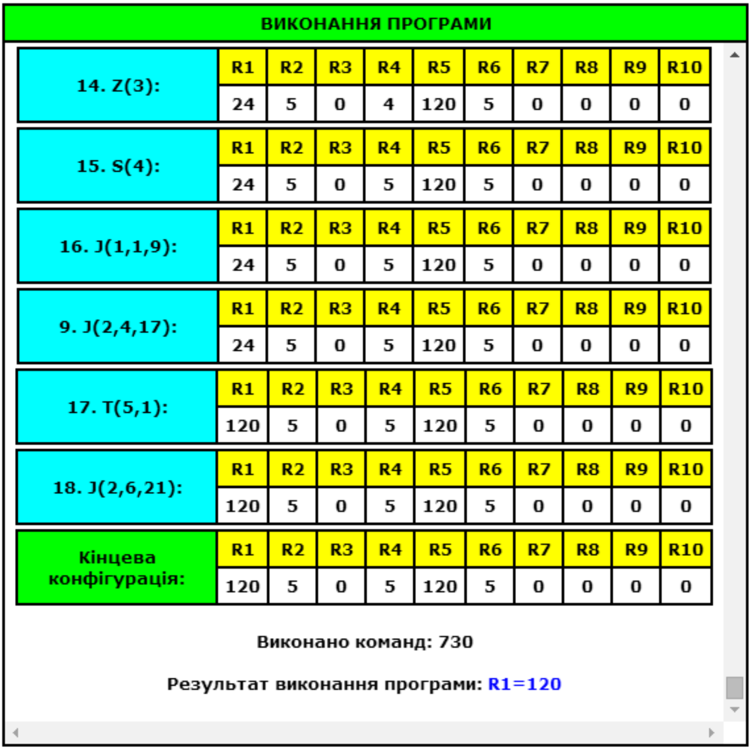
10) режим експорту поточного коду програми МНР.

Емулятор загальнодоступний для тестування та використання за посиланням:

http://test.chv.ua/MNR.html

На наведеному далі рисунку показано фрагмент інтерфейсу емулятора – область візуалізації процесу виконання програми, в якій вказуються початкова, всі проміжні та кінцева конфігурації, кількість виконаних команд і результат виконання програми МНР. Біля кожної з проміжних конфігурацій вказана команда програми, виконання якої привело до виникнення цієї конфігурації.

Програма, що в даному випадку виконувалася в емуляторі, – раніше наведена програма для обчислення функції $f(x) = x!$. Аргументом функції було задано $x = 5$. Відповідний результат обчислення (120) був отриманий після виконання 730 команд.



ВИКОНАННЯ ПРОГРАМИ

	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9	R10
14. Z(3):	24	5	0	4	120	5	0	0	0	0
15. S(4):	24	5	0	5	120	5	0	0	0	0
16. J(1,1,9):	24	5	0	5	120	5	0	0	0	0
9. J(2,4,17):	24	5	0	5	120	5	0	0	0	0
17. T(5,1):	120	5	0	5	120	5	0	0	0	0
18. J(2,6,21):	120	5	0	5	120	5	0	0	0	0
Кінцева конфігурація:	120	5	0	5	120	5	0	0	0	0

Виконано команд: 730

Результат виконання програми: R1=120

Вкажемо також інші результати, отримані при тестуванні в емуляторі програми для обчислення функції $f(x) = x!$:

x	Результат обчислення	Кількість виконаних команд
0	1	4
1	1	20
2	2	46
3	6	93
4	24	217
5	120	730

[1] Катленд Н. *Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций.* – М.: Мир, 1983. – 256 с.

[2] Крупский В.Н., Плиско В.Е. *Теория алгоритмов.* – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 208 с.

Ігор Черевко

Про систему забезпечення якості вищої освіти

Чернівецький національний університет, Чернівці, Україна
E-mail: i.cherevko@chnu.edu.ua

Аналіз проблем і моделей системи університетської освіти, пошук шляхів для забезпечення її розвитку залишаються традиційно актуальними для педагогічної науки, оскільки вища освіта переживає радикальні зміни щоб відповідати вимогам XXI століття.

Практично всі розвинуті країни проводять реформи національних систем освіти, вкладають в них величезні фінансові ресурси. Реформи вищої освіти набули статусу державної політики та пов'язані головним чином із новими функціями вищої школи і підвищенням якості вищої освіти.

В останні 10-15 років відбувається криза освіти в Україні, суть якої полягає в орієнтації існуючої освітньої системи України в основному на підтримку старої системи навчання, а сучасний етап розвитку людства вимагає від освітніх систем так званого інноваційного навчання, яке формує у студентів професійні навички змінювати і впливати на майбутнє, самостійно засвоювати нові знання.

Підвищення якості освітнього процесу та якості випускників стає обов'язковою умовою успішного функціонування і подальшого розвитку ВНЗ. Звичних, традиційних способів оцінки вузів, до яких звикли (кількість кваліфікованих викладачів, обсяг бібліотечного фонду, імідж вузу і ін.) в сьогоднішніх умовах недостатньо. Все чіткіше проявляється тенденція зовнішнього контролю якості підготовки фахівців роботодавцями, які хочуть щоб їхні вимоги до змісту підготовки фахівців були задоволені.

На даний час в освітньому просторі європейських вузівських систем менеджмент якості вищої освіти виходить з наступних постулатів [1]:

- основну відповідальність, як за якість реалізації освітнього процесу, так і за якість його забезпечення повинні нести самі вищі навчальні заклади, при цьому інтереси суспільства і держави в плані якості та рівня стандартів вищої освіти повинні гарантуватися;

- якість освітніх програм необхідно розвивати і покращувати постійно, а для цього необхідно мати ефективно працюючі організаційні структури, в рамках яких освітні програми отримують забезпечення і підтримку розвитку.

Система забезпечення якості освіти в університеті повинна бути комплексом розроблених нормативно-методичних документів, що визначають зміст, технології, методи і засоби роботи всіх посадових осіб, викладачів і студентів щодо подальшого підвищення якості освітнього процесу та професійної компетентності випускників університету. Вона має забезпечити розробку політики та цілей якості освіти, шляхи досягнення цих цілей і бути основою постійного поліпшення всіх процесів вузу.

Основними факторами, що забезпечують якість освіти, є:

1. Якість освітніх стандартів;
2. Якість абітурієнтів;
3. Якість програм навчання та навчальних планів;
4. Якість академічного персоналу;
5. Якість інформаційно-методичного забезпечення навчального процесу;
6. Якість матеріально-технічної бази навчального процесу;
7. Якість управління процесом підготовки фахівців;

Практика підтверджує, що в сфері освіти можна керувати якістю навчання на основі двох складових:

– Оцінки знань, навичок і умінь випускників шляхом тестування та інших форм контролю;

– Оцінки показників організації, процесу і засобів навчання.

Досвід показує, що переважно інспектуючий стиль роботи над якістю успіху мати не може. У той же час якістю можна і потрібно управляти. Для цього потрібно створювати таку систему забезпечення якістю, яка зрозуміла всім учасникам освітнього процесу, ефективність якої очевидна, впровадження не вимагає значних матеріальних затрат, громіздкого документообігу і зайвої звітності.

Стандарти і рекомендації для забезпечення якості вищої освіти в Європейському просторі [1] більше сфокусовані на тому, що має бути зроблено і менше на тому, як цього досягти. Тому ВНЗ України мають велике поле для ініціативи і визначення власних, особливо процесуальних,задач та їх вирішення з урахуванням особливостей вузу.

[1] http://www.britishcouncil.org.ua/sites/default/files/standards-and-guidelines_for_qa_in_the_ehea_2015.pdf

Володимир Ясинський [1], *Галина Перун* [2]

Про існування розв'язків двох стохастичних параболічних рівнянь

[1] *ЧНУ ім. Ю. Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: depsasfm@gmail.com
[2] *ЧНУ ім. Ю. Федьковича, Чернівці, Україна*
E-mail: perungm@ukr.net

У базовому ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0\}, P)$ розглядаються задачі для стохастичного параболічного рівняння.

I. Задача з імпульсною дією та неперервними збуреннями

$$d_t u(t,x,\omega) = \left[\sum_{k \leq 2b} A_k D_x^k u(t,x,\omega)\right] dt +$$

$$+ \left[\sum_{k \leq b} C_k D_x^k u(t,x,\omega)\right] dw(t,\omega), \tag{1}$$

де $t \in (t_0, T]$; $x \in \mathbb{R}^n$; $\omega \in \Omega$; $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$, $j \in \{1, 2, ..., N\}$, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_N \leq T$;

$$u(t,x,\omega)|_{t=t_0} = \varphi(x,\omega), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

при $t = \tau_j$, $j \in \{1, 2, ..., N\}$ – умова стрибка [1]

$$\Delta_t u(t,x,\omega)|_{t=\tau_j} = u(\tau_j+0,x,\omega) - u(\tau_j-0,x,\omega) = L_j u(\tau_j-0,x,\omega), \tag{3}$$

$L_j \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

II. Багатоточкова задача Коші з напіввінеровими збуреннями

$$d_t u(t,x,\omega) = \left[\sum_{|k| \leq 2b} A_k D_x^k u(t,x,\omega)\right] dt +$$

$$+ \left[\sum_{|k| \leq b} C_k D_x^k u(t,x,\omega)\right] dw^*(t,\omega), \tag{4}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$; $t > 0$; $\omega \in \Omega$; $d^* w(t,\omega) = d\left(-\left|w(t,\omega)\right|\right)$,

$$\mu u(t,x,\omega)|_{t=0} - \mu_1 u(t,x,\omega)|_{t=t_1} - \ldots - \mu_m u(t,x,\omega)|_{t=t_m} = \phi\left(x,\omega\right), \tag{5}$$

крім того,

$$u(t,x,\omega)|_{t=0} = 1;\ u(t,x,\omega)|_{t=t_i} = \phi_i\left(x,\omega\right), i = 1,\ldots,m, \tag{6}$$

$\{\mu_1,\ldots,\mu_m\} \in (0;+\infty)$, $m = \{2,3,\ldots\}$, $\{t_1,t_2,\ldots,t_m\} \in (0,T]$ і $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = T$.

Тут $\sum\limits_{|k|\leq 2b} A_k D_x^k$, $\sum\limits_{|k|\leq b} C_k D_x^k$ – диференціальні многочлени, $w(t,\omega)$ – стандартний скалярний вінерів процес, $\varphi(x,\omega)$ з імовірністю 1 допускає перетворення Фур'є.

Шукатимемо розв'язки задач (I) і (II) у вигляді оберненого перетворення Фур'є від деякої функції $v(t,\sigma,\omega)$:

$$u(t,x,\omega) = F^{-1}_{\sigma\to x} v(t,\sigma,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\sigma x} v(t,\sigma,\omega)d\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

У результаті отримаємо відповідні задачі для звичайного стохастичного рівняння з неперервними збуреннями [2]

$$d_t v(t,\sigma,\omega) = \left[\sum_{|k|\leq 2b} A_k (i\sigma)^k v(t,\sigma,\omega)\right] dt +$$

$$+\left[\sum_{|k|\leq b} C_k (i\sigma)^k v(t,\sigma,\omega)\right] d^{(I,II)} w(t,\omega), \tag{7}$$

де $d^{(I)}w(t,\omega) \equiv dw(t,\omega)$, $d^{(II)}w(t,\omega) \equiv d^* w(t,\omega)$.

Його загальний розв'язок визначається формулою [2]

$$v(t,\sigma,\omega) = c\exp\left\{\left(\sum_{|k|\leq 2b} A_k (i\sigma)^k - \tfrac{1}{2}\left(\sum_{|k|\leq b} C_k (i\sigma)^k\right)^2\right) t + \right.$$

$$\left. + \sum_{|k|\leq b} C_k (i\sigma)^k d^{(I,II)} w(t,\omega)\right\}. \tag{8}$$

Підставивши початкові дані (2), (3) та (5), (6) задач (I) і (II) зможемо виписати розв'язки задач в образах Фур'є за допомогою нормального фундаментального розв'язку стохастичних задач Коші для рівняння (7)

$$Q\left(t,\sigma,\omega\right)\equiv\exp\left\{\left(\sum_{|k|\leq 2b}A_k(i\sigma)^k-\frac{1}{2}\left(\sum_{|k|\leq b}C_k(i\sigma)^k\right)^2\right)t+\right.$$

$$\left.+\sum_{|k|\leq b}C_k(i\sigma)^k dw^{(I,II)}\right\}. \tag{9}$$

Якщо виконується нерівність

$$\mathrm{Re}\sum_{|k|\leq 2b}A_k(i\sigma)^k+\frac{1}{2}\left(\mathrm{Im}\sum_{|k|\leq b}C_k(i\sigma)^k\right)^2\leq-\delta_1|\sigma|^{2b}+\delta_2,$$

$\delta_1,\delta_2>0$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$, яка є аналогом умови параболічності для детермінованого рівняння, то вона забезпечує існування з ймовірністю 1 обереного перетворення Фур'є матриціанта в задачі (I) і разом з умовою $\sum\limits_{s=1}^{m}\mu_s M\left\{\left|Q\left(t,\sigma,\omega\right)\right|\right\}<\mu$ – існування функції Гріна задачі (II). Тут M – операція математичного сподівання. Застосувавши до інтегралів, якими визначаються функції Гріна G в обох задачах, лему [3] про перетворення Фур'є цілих функцій, отримаємо оцінки для похідних $\left|M\left\{D_x^k G\left(t,\tau,x,\xi\right)\right\}\right|$.

За умови, що функція $\varphi(x,\omega)$ належить простору $\{C(\mathbb{R}^n),M\}$ зі скінченною нормою

$$|\varphi|_{\{C(\mathbb{R}^n),M\}}=\sup_x M\left\{|\varphi(x)|\right\},$$

розв'язки задач (I), (II) допускають нерівність

$$\left|M\left\{D_x^k u\left(t,x,\omega\right)\right\}\right|\leq ct^{-\frac{|k|}{2b}}\sup_x M\left\{|\varphi(x,\omega)|\right\},k\leq 2b.$$

[1] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.* – К.: Вища школа, 1987. – 258 с.

[2] Гихман И.И., Скороход А.В. *Стохастические дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 357 с.

[3] Эйдельман С.Д. *Параболические системы.* – К.: Наукова думка, 1964. – 444 с.

СПОГАДИ ВИКЛАДАЧІВ КАФЕДРИ ТА ФАКУЛЬТЕТУ

ДО 55-РІЧЧЯ КАФЕДРИ ПММ

Іван Федорович Григорчук

Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Викладач кафедри математичного аналізу
Чернівецького національного університету
у 1966 – 1999 роках

Хочу поділитися спогадами про своїх друзів – співробітників кафедри ПММ, яких, на жаль, уже давно нема серед нас, а також про деяких її випускників.

Влітку 1960 року на річці Прут, яка протікає між двома селами Тулова і Видинів, я познайомився з молодим симпатичним хлопцем Василем, який справив на мене велике враження своєю вихованістю, культурою поведінки. Він розповів, що він родом з села Тулова і навчається в аспірантурі при Інституті математики Академії наук УРСР. У 1972 році цей хлопець, уже Василь Іванович Фодчук, почав завідувати кафедрою ПММ Чернівецького університету і наші зв'язки відновилися, а згодом переросли в дружбу.

Наші приятельські стосунки зміцніли і завдяки дачним ділянкам, які волею долі були по сусідству. Ми часто, відпочиваючи після фізичної праці, обговорювали деякі питання суспільно-політичного життя країни. З наших спілкувань я зрозумів, що Василь Іванович великий патріот України, його батьки підтримували вояків УПА, а сам він вірить, що буде жити в незалежній Україні. Його пророцтво здійснилося, але, на жаль, менше року Василь прожив після проголошення незалежності України.

У Чернівцях, після хрущовської відлиги, я випадково познайомився з сім'єю Харуків, яка після багатолітнього поневолення в таборах Гулагу за зв'язки з підпіллям ОУН-УПА, з Магадану переїхала до Чернівців. Як виявилося, Іван Миколайович Харук родом із Тулови, а його дружина, Зінаїда Григорівна – із села Стецівка, яке знаходиться між Снятином і Городенкою. Одного разу я розповів Василеві Івановичу про його земляків – сім'ю Харуків. Моя розповідь дуже зацікавила Василя і він попросив мене обов'язково познайомити його з ними, що я й зробив. Так вони й подружилися. Дні народження, Різдво та Великдень ми відзначали разом, колядували і навіть співали гімн України «Ще не вмерла Україна». Василь Іванович співав разом з нами, хоча добре знав, що за це в той час можна позбутися не лише посади, але й волі.

Василь Іванович був не лише прекрасним науковцем, але й добрим сім'янином. За яку б роботу він не взявся, завжди старався виконати її якнайкраще. Його дачний будинок та земельна ділянка завжди були у взірцевому стані.

При першій же нагоді він старався відвідати своїх батьків. Коли я їхав в напрямку Коломиї, Василь Іванович не пропускав нагоди побувати в рідному селі, склавши мені товариство. Так я познайомився з його батьками та сестрою, чудовими людьми, які також відійшли у вічність.

Сільська хата, в якій пройшли дитинство і юність Василя Івановича, знаходилася на високому березі Прута, звідки відкривається прекрасна панорама: внизу річка Прут із заплавами, луг, а далі передгір'я Карпат. Часом літом, при ясній погоді, можна з цього місця побачити навіть найвищу гору Українських Карпат – Говерлу. Коли Василь Іванович вже почав відчувати деякі недомагання, восени 1991 року, то попросив мене поїхати в Карпати на один день. Він планував частину відпустки літом провести в горах, але доля розпорядилася інакше.

Ще одним сусідом по дачній ділянці був доцент кафедри ПММ – Павло Прохорович Вчерашнюк. Павло був щирим, добрим товаришем, готовий завжди допомогти в разі потреби. Працюючи на ділянці, втомившись, любив наводити слова Галушки з п'єси О.Є. Корнійчука «В степах України» – «каждий сєбє делает цвєтющую жізнь». Павло Прохорович дуже гордився своїм селом, Житомирщиною, і вговорив мене поїхати в його рідні місця. Його рідне село (не запам'ятав назви) справді прекрасне. Ми гостили в його брата, батьків вже не було в живих. Посеред села великий став, поруч церква, школа, сільська рада. Коли ми їхали по дорозі, зустрічали лосів, які не дуже охоче поступались дорогою. Павло Прохорович побував і в моєму рідному селі. Він володів прекрасним голосом, часто любив співати. Його голос виявився співзвучним з голосом мого родича, також Павла, і вони протягом вечора могли дати справжній концерт української пісні.

Від початку відкриття кафедри ПММ і аж до виходу на пенсію в 1999 році я читав студентам кафедри курс лекцій з математичного аналізу і курс з теорії функцій дійсної змінної. У зв'язку з цим хочу поділитися деякими спогадами про роботу кафедри з студентським колективом. Вже починаючи з першого курсу, студентів залучали до дослідницької роботи, вони систематично відвідували лекції, не було пропусків занять без поважних причин і такі заходи дали хороші результати. Всі випускники кафедри після закінчення навчання були працевлаштовані на підприємствах, в науково-дослідних установах.

Чимало з випускників кафедри захистили кандидатські і докторські дисертації, більшість із них і на даний час працюють у вузах України та за її межами. Добре мені запам'ятались студенти, які стали докторами наук. Серед них професор, член-кореспондент НАН України Василь Слюсарчук, професор, колишній завідувач кафедри МПУіК Федір Сопронюк. На кафедрі диференціальних рівнянь ЧНУ працюють мої колишні студенти доценти Галина Перун та Ірина Лусте, на кафедрі ПММ доцентом працював Аркадій Семчук.

Особливо запам'ятався мені випуск 1974 року, якому в 1971-72 навчальному році я читав семестровий курс з теорії функцій дійсної змінної після чотирисеместрового курсу з математичного аналізу, який вів професор Микола Іванович Нагнибіда. Випускник Ярослав Бігун, нині доктор фізико-математичних наук, професор, завідує кафедрою прикладної математики та інформаційних технологій. Мирослав Пітцик, кандидат фізико-математичних наук, Заслужений економіст України, виконавчий директор Всеукраїнської асоціації органів місцевого самоврядування "Асоціація міст України". Доцентами кафедри математичного аналізу працювали Надія і Степан Лінчуки. Вже немає серед нас кандидатів наук Івана Роголя й Івана Юртина. Доцентом кафедри математичного моделювання працює випускниця кафедри ПММ Тетяна Караванова, яку я пам'ятаю як Романюк. Мій земляк із Покуття, кандидат технічних наук Богдан Шепетюк працює доцентом кафедри ПМтаІТ.

СПОГАДИ ПРО РОБОТУ НА КАФЕДРІ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ

Михайлина Михайлівна Дрінь

Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Викладач кафедри прикладної математики і механіки
у 1974 – 2015 роках

Навчаючись у 1963–1968 рр. і працюючи в 1968–2015 рр. у Чернівецькому університеті я пройшла шлях від студента і лаборанта кафедри диференціальних рівнянь (1968–1974 рр.) до доцента кафедри прикладної математики і механіки.

У 1974 році я була обрана за конкурсом на посаду асистента кафедри ПММ, а в 1989 році на посаду доцента цієї ж кафедри, з якої за власним бажанням була звільнена в 2015 році.

Працюючи на кафедрі ПММ, я вела практичні й лабораторні заняття та читала лекції з усіх розділів вищої математики для студентів загальнотехнічного факультету; числових методів, баз даних, дискретної математики та спеціального курсу «Математичне моделювання природничих процесів» для студентів математичного факультету; інформатики для студентів, які навчалися за гуманітарним та соціально-економічним напрямами та спеціальностями.

Мої наукові праці були пов'язані з дослідженнями операторів Гріна параболічних задач спряження (науковий керівник професор С.Д. Івасишен), побудовою різницевих схем для крайових задач та задач спряження для деяких квазілінійних параболічних рівнянь та систем, дослідження деяких нелокальних задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь.

Я вдячна долі, що вона дала мені можливість працювати 40 років на кафедрі ПММ. З точки зору педагогіки, я намагалась вчити студентів так, щоб вони бачили, де викладений матеріал може бути застосований і щоб вміли його застосовувати, я старалася вчити їх думати. Всі дисципліни старалась читати чітко і обґрунтовано, а в математичних не обминати доведень. Для мене в житті не було кращої роботи, ніж вивчати математику та викладати її.

У мене зберeглись найтепліші почуття про роботу на кафедрі ПММ. І це пов'язано в першу чергу з тим, що на кафедрі завжди панувала доброзичлива, творча і ділова атмосфера, взаємоповага між співробітниками і керівниками кафедри – світлої пам'яті професором Василем Івановичем Фодчуком і нинішнім завідувачем професором Ярославом Йосиповичем Бігуном. Керівники кафедри завжди підтримували молоді науково-педагогічні кадри, дбали про покращення навчального процесу і матеріально-технічну базу кафедри. Вони вимагали серйозного ставлення до своєї роботи усіх співробітників. За це їм щира подяка і поклін.

Щиро вдячна усім співробітникам кафедри, з котрими мені приходилось працювати впродовж 40 років. Буду рада спілкуванню з ними в подальшому.

Світла пам'ять про тих, що відійшли у вічність: професора Фодчука Василя Івановича, доцента Вчерашнюка Павла Прохоровича, доцента Бортея Мирослава Степановича буде завжди зі мною.

МОЯ КАФЕДРА – ПММ

Ніна Володимирівна Котенко

Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Викладач кафедри прикладної математики та механіки
у 1967 – 2010 роках

Після закінчення в червні 1967 р. кафедри ПММ ЧДУ і отримавши червоний диплом, мені запропонували посаду асистента на цій же кафедрі. Зарахована на роботу 01.09.1967 р. До вступу в університет у мене вже був стаж роботи на підприємстві – 1 рік, 4 місяці і 14 днів (такі в той час були вимоги до абітурієнтів – мати 2 роки стажу).

З Чернівецьким національним університетом імені Юрія Федьковича, а саме з кафедрою ПММ, у мене пов'язане життя до 31.08.2010 р., не враховуючи 5 років навчання з 1962 по 1967 рр. та роботи в інших підрозділах Чернівецького університету.

Працювати спочатку було дуже важко. Не вистачало професійних знань, вмінь, навичок, досвіду, знань методики викладання. А ми в ті часи працювали на вечірньому і заочному відділеннях загальнотехнічного факультету, фізичного факультету, на денній і заочній формах математичного факультету. Викладали вищу математику, методи наближених обчислень (починали з арифмометрів), лабораторії спеціальності і таке інше. Навантаження було дуже різноманітним, плюс курсові та дипломні. В роботі допомагали старші товариші. Особливу увагу приділяв навчанню молодих спеціалістів завідувач кафедрою професор Рубаник В.П. Потрібно зауважити, що заочники приїздили на заняття через кожних 2 тижні, виконували по 3 контрольні роботи в семестрі з обов'язковою співбесідою з викладачем щодо самостійного їх виконання і наступним їх зарахуванням. Молодим асистентам лекції читати не рекомендували.

Рубаник В.П. дуже серйозно і вимогливо відносився до підготовки молодих кадрів. Дуже часто відвідував наші пари. Дуже не любив, коли зошит з розв'язаними задачами ми тримали перед дошкою в руках. Робив дуже слушні зауваження, інколи навіть сварив, але дуже толерантно. Доручав доцентам кафедри відвідувати наші пари і в разі потреби робити потрібні зауваження. Він зобов'язував молодь обов'язково відвідувати його лекції, особливо з вищої математики. Дуже часто пропонував проводити нам відкриті пари з наступним їх обговоренням на засіданні кафедри з метою допомоги і підняття професійного рівня молодих кадрів.

Варто відзначити, що на факультеті дуже інтенсивно працював методичний семінар, на якому завжди обговорювались усі відкриті пари, лекції усіх викладачів факультету. На відкриті пари запрошувались усі вільні від занять викладачі, особливо молодь, а також корифеї факультету, які давали необхідні поради при обговоренні відкритих пар. Завдяки цьому наш факультет був, є і залишається кузнею потужних професійних кадрів і сучасних інформаційних технологій. Бажаю факультету процвітання, наукових і творчих здобутків, а також сучасних і належних професійних кадрів.

Було на нашому факультеті ще таке правило: перед кожним святом, згідно складеного графіка, кожна кафедра готувала елементи художньої самодіяльності: різні виступи, співи, уривки з відомих п'єс, дружні шаржі, плакати тощо. Збирались у великій залі гуртожитку. Було дуже весело. Фуршетів не було.

Згадую ще як В.П. Рубаник читав вже на старших курсах спецкурс. Досить складний, не пам'ятаю назви. Але дуже не любив, коли користувались шпаргалками. У нього було дві пари окулярів: одні для аудиторії, другі – для себе. Першими дивився на студентів і в разі підозри робив різке зауваження.

Я ніколи не користувалась «шпорами», а тут вперше в житті вирішила скористатись, але Василь Павлович в цей момент подивився на студентів і зробив вголос попередження, щоб усі забули за «додатковий матеріал», інакше – «2». Мені було так соромно, що після цього я вже ніколи і не думала чимось таким користуватися.

СПОГАДИ ПРО ПРОФЕСОРА В.П. РУБАНИКА

Зінаїда Леонідівна Кравченко

Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Викладач кафедри прикладної математики та механіки
у 1962 – 1990 роках

Професора В.П. Рубаника я знала з 1953 р., коли була студенткою фізико-математичного факультету, математичної групи (кафедра математичного аналізу), а він на той час працював на кафедрі диференціальних рівнянь.

В 1956 р. я закінчила університет за спеціальністю «Математичний аналіз». В.П. Рубаник був Головою Державної екзаменаційної комісії. Математиків-випускників в 1956 році було лише 17, деякі з них пізніше довгий час працювали в університеті.

В 1961 р., після від'їзду проф. М.К. Фаге, В.П. Рубаник очолив кафедру математичного аналізу, де я тоді працювала на посаді інженера. В 1962 р. була створена кафедра прикладної математики і механіки (ПММ), яку очолив В.П. Рубаник.

Я працювала на кафедрі ПММ асистентом (з 1962 р.), викладачем (з 1964 р.), старшим викладачем (з 1967 р.), доцентом (з 1979 р.). Вийшла на пенсію в 1990 році.

Основним напрямком наукових досліджень кафедри була теорія коливань нелінійних систем із запізненням.

На кафедрі працювали спочатку Г.В. Ножак, Ю.І. Марченко, П.П. Вчерашнюк, М.М. Ігнатенко (Майданюк), З.Л. Кравченко (Середюк), П.Ф. Ярема, Є.М. Круг, В.С. Шкільнюк, І.А. Антипова (до 1963 р.), Л.К. Старик (до 1963 р.), З.І. Вітер, Г.Т. Кость. Пізніше працювали Є.Ф. Царков, А.М. Садов'як, М.Л. Свердан, Д.О. Мігуца, В.К. Ясинський, Л.І. Ясинська, Н.В. Котенко та інші.

В.П. Рубаник вніс значний вклад в науку. В 1964 р. він захистив докторську дисертацію, а в 1969 вийшла його перша монографія «Колебания квазилинейных систем с запаздыванием» (М.: Наука, 1969 г.).

В.П. Рубаник приклав багато зусиль для створення обчислювальної лабораторії при математичному факультеті, йому належала ініціатива проведення трьох всесоюзних конференцій з теорії диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється (1965 р., 1968 р., 1972 р.), в яких брали участь відомі вчені, а також викладачі кафедри ПММ.

Василь Павлович був дуже енергійним і вимогливим керівником. Він допомагав багатьом викладачам кафедри як у науковій, так і в педагогічній роботі, а також передавав великий науковий досвід студентам.

Під керівництвом В.П. Рубаника в Чернівецькому університеті було захищено 8 кандидатських дисертацій (Ножак Г.В., Марченко Ю.І., Ігнатенко М.М., Кравченко З.Л., Ярема П.Ф., Гайсенюк Б.С., Старик Л.К.).

В.П. Рубаник займався не тільки науковою і педагогічною роботою. Він мав широке коло інтересів, зокрема він займався спортом (ковзани), туризмом, цікавився мистецтвом, музикою.

У 1972 р. на базі кафедри ПММ була створена кафедра математичних проблем управління і кібернетики і частина викладачів перейшла на цю кафедру, очолив її професор Рубаник В.П. Кафедрою ПММ став завідувати Василь Іванович Фодчук, який перед цим захистив докторську дисертацію.

СПОГАДИ ПРО ВЧИТЕЛЯ

Володимир Петрович Лавренчук

Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Викладач фізико-математичного факультету, математичного факультету і факультету прикладної математики в 1960 – 2010 роках

Одним із найшанованіших мною університетських викладачів є Василь Павлович Рубаник. Склалося так, що під його керівництвом я виконував дві курсові, а потім і дипломну роботу. Зрозуміло, що не все вдавалося при написанні цих робіт. Василь Павлович ніколи не сердився і не читав моралі, а делікатно і спокійно пояснював, що і як треба зробити. До своїх учнів він ставився з повагою і дбав про їх подальше працевлаштування. Виконуючи обов'язки завідувача кафедри диференціальних рівнянь, при розподілі на роботу випускників він запропонував мені залишитися на посаді асистента цієї кафедри.

Розпочавши викладацьку роботу, я вів практичні заняття з вищої математики для студентів фізичного факультету, а лекції їм читав Василь Павлович. Розробляючи робочу програму з курсу, він детально розписував, що я маю дати студентам і в якому обсязі. У ті часи лектор і завідувач кафедри часто відвідували заняття асистентів. Під час обговорення заняття Василь Павлович, роблячи розбір заняття, звертав мою увагу на огріхи у викладі матеріалу і робив це надзвичайно доброзичливо, супроводжуючи все глибоким аналізом як змісту, так і мови викладання.

Працюючи асистентом кафедри диференціальних рівнянь, я продовжував наукову роботу з Василем Павловичем, брав участь у роботі наукового семінару, яким він керував. Оскільки, після поділу у 1962 році кафедри диференціальних рівнянь і утворення кафедри прикладної математики та механіки, я залишився на кафедрі диференціальних рівнянь, яку очолив професор Ейдельман С.Д., то треба було визначатися з подальшим напрямком наукової роботи. У цей час В.П. Рубаник активно займався написанням докторської дисертації і тому не мав можливості визначитися з моєю темою кандидатської дисертації. Оскільки С.Д. Ейдельман запропонував займатися науковими дослідженнями з ним, то я змінив наукового керівника і тематику наукової роботи. Василь Павлович не образився на мене, але часом жартівливо казав, що я «пєрєбєжчік».

Слід відзначити надзвичайну працездатність Василя Павловича і сміливість братися за нові напрямки в науці. Так, працювавши на кафедрі диференціальних рівнянь, він взявся за організацію кафедри прикладної математики та механіки, розробивши при цьому повне науково-методичне забезпечення курсів, які читалися на новій кафедрі. Через десять років Василь Павлович заснував кафедру МПУіК. Завдяки його зусиллям на нашому факультеті з'явився прикладний напрямок в науковій роботі і підготовці фахівців.

Василь Павлович був надзвичайно відповідальною людиною, завжди намагався допомогти молодим науковцям у захисті кандидатських дисертацій. Працюючи проректором університету з наукової роботи, він зумів організувати раду по захисту кандидатських дисертацій з математики в університеті. Крім того, він проводив наукові конференції в університеті, публікуючи їхні результати окремими збірниками, а це давало можливість публікувати швидше свої результати молодим науковцям. Зокрема, він багато допоміг і мені з публікаціями і захистом кандидатської дисертації, не тримаючи на мене зла, що я перейшов до іншого керівника.

Треба відзначити, що Василь Павлович крім занять математикою цікавився літературою і музикою. Пам'ятаю, що мене вразила його домашня бібліотека своїм багатством і різноманітністю. Він був справжнім викладачем, працелюбною і порядною людиною.

ПРО КАФЕДРУ ПММ

Дмитро Олексійович Мігуца

Кандидат фізико-математичних наук, доцент
Викладач кафедри прикладної математики та механіки
у 1969 – 2012 роках

Народився 13 жовтня 1939 року в селі Мариничі, Путильського району Чернівецької області.

У жовтні 1947 року нас вивезли, як переселенців, в Пермську область, місто Губаха, селище 72 пікет, де ми проживали до 1956 року. Батьки на початках ходили до міліції відмічатися один раз на місяць. З 1954 року відмічалися тільки один раз на рік.

Там у 1949 році я пішов у школу. В 1956 році, закінчивши 7-й клас, пішов вчитися у вечірню школу і влаштувався на роботу. З 1955 року ми могли вже повернутись в Україну і в кінці 1956 року (перед самим Новим Роком) переїхали на Батьківщину і поселилися у селі Мариничі. Починаючи з третьої чверті, я продовжив навчання у 8 класі (денна форма навчання) у школі, яка була і є в даний час у с. Розтоки, Путильського району. Школу закінчив у 1959 році. Восени цього ж року був призваний до лав Радянської Армії. Відслужив в армії три роки в Житомирській області, місто Новоград-Волинський. На третьому році служби в армії відвідував підготовчі курси по вступу до вищих навчальних закладів. По закінченні курсів у серпні 1962 року я подав документи до ЧДУ на математичне відділення фізико-математичного факультету. Складав таких п'ять іспитів: математика (усно), математика (письмово), фізика (усно), іноземна мова (усно), українська мова та література (письмово). Оскільки я вивчав українську менше 2,5 років, то мені прийшлося з української мови та літератури проходити співбесіду з цього предмету.

Отже, в 1962 році я став студентом фізико-математичного факультету ЧДУ, математичне відділення. Деканом факультету був доцент Беляєв Микола Григорович, а заступником Коцюмаха Павло Анан'євич. Пам'ятаю такий випадок при вступі: стою я на третьому поверсі 1-го корпусу у військовій формі і до мене підходить Коцюмаха П.А. і запитує, у якій аудиторії я складаю іспит. Після цього він пішов від мене.

Перших два курси математики разом слухали всі загальні предмети. Нас вчили досвідчені викладачі: Беляєв Микола Григорович, Нестеренко Михайло Іванович, Голець Богдан Іванович, Фішман Карл Моріцович, Собчук Василь Степанович, Калюш Олексій Валерійович, Васюк Леонід Іванович, Балазюк Таїсія Назарівна, Сасько Галина Михайлівна та інші.

На третьому курсі нас розподілили по кафедрах, згідно з спеціалізацією. Я вибрав згідно з поданою заявою кафедру прикладної математики та механіки, що утворилася в 1962 році і завідувачем якої був доцент Рубаник Василь Павлович. На даній кафедрі читали різні курси такі викладачі: Рубаникд Василь Павлович, Круг Юхим Матвійович, Вчерашнюк Павло Прохорович, Марченко Юлія Іванівна, Ножак Георгій Васильович, Майданюк (Ігнатенко) Марія Миколаївна, Свердан Михайло Леонович, Кравченко Зінаїда Леонідівна та інші. Навчалися ми переважно у першому корпусі. Пам'ятаю, в аудиторіях були старі шкільні парти і у 8 аудиторії ще не було амфітеатру. На той час студенти отримували стипендію у розмірі 22 карбованців того часу. З першого по четвертий курси проживав у гуртожитку №4, який розташований по вулиці Поштовій, спочатку у 7 кімнаті, а потім у 52 кімнаті. Їжу готували ми самі на гуртожитській кухні. Мені доручили гроші для покупки продуктів і я був звільнений від приготування їжі. Їжу готували по черзі студенти, які проживали у кімнаті. Таке було напрочуд веселе і відповідальне студентське життя.

Після розподілу по кафедрах мене призначили старостою групи, а також старостою всього курсу, яким був до завершення навчання в університеті.

На п'ятому курсі я був на виробничій практиці у Києві в КВІАВУ (Київське вище авіаційне військове училище). Практикою керував професор Гробов Валеріан Олександрович і він був моїм співкерівником дипломної роботи, а керівником від кафедри був доцент Павло Прохорович Вчерашнюк.

В 1967 році закінчив навчання в університеті по спеціальності обчислювальна математика і був, згідно з розподілом, направлений на роботу в Архангельську область, Котласький район на Паперовобавовняний комбінат, де працював інженером-програмістом. Там я пропрацював до 12 січня 1969 року. Після року роботи на комбінаті мені надали відпустку і я приїхав в Україну. По завершенню відпустки, повертаючись назад на роботу, я завітав на кафедру, яку закінчував. На той час викладач кафедри Садов'як Антон Михайлович мав вступати в аспірантуру і завідувач кафедри Василь Павлович Рубаник запропонував мені подати документи на конкурс по обранню на посаду асистента кафедри. По приїзду на роботу, після відпустки, я оформив документи і відіслав їх в університет для участі в конкурсі. На початку 1969 року мені сповістили, що мене обрано по конкурсу на посаду асистента кафедри прикладної математики та механіки. Мені прийшлося їхати у Москву в Міністерство для отримання відкріплення, з великими потугами мені вдалося його отримати і я приїхав в Чернівці 12 січня 1969 року, а з 13 січня 1969 року я почав працювати спочатку асистентом, а потім доцентом на кафедрі прикладної математики та механіки, де пропрацював до серпня місяця 2012 року, тобто 43 роки. Працюючи на кафедрі, я продовжив наукові дослідження по темі, по якій я писав дипломну роботу. Керівником роботи був доцент кафедри Вчерашнюк Павло Прохорович (02.02.1930–04.12.1987). Наукову роботу виконував без вступу до аспірантури. У червні 1977 року захистив кандидатську дисертацію на тему: «Динаміка обертальних рухів твердого тіла відносно неголовних осей інерції». Захист дисертації відбувся 28 червня 1977 року на засіданні спеціалізованої ради К 016.50.03 при Інституті математики АН УРСР м. Київ. Офіційними опонентами були: доктор фізико-математичних наук, професор Володимир Васильович Білецький (м. Москва) та доктор технічних наук, професор Валеріан Олександрович Гробов (м. Київ). Провідною установою був Київський державний університет. Дисертація була виконана на кафедрі прикладної математики та механіки Чернівецького державного університету.

Неодноразово брав участь у міжнародних, республіканських наукових конференціях з доповідями, наукові праці були надруковані у міжнародних та республіканських журналах, робив дописи в університетську газету про вчителя Вчерашнюка Павла Прохоровича.

В 1988 році мені було присвоєно вчене звання доцента по кафедрі прикладної математики і механіки. Мною підготовлено і надруковано понад 45 наукових праць та 14 навчально-методичних посібників. В 1999 році, по досягненні 60 річного віку, я вийшов на пенсію, але пропрацював ще на пенсії з 1999 року по 2012 рік (13 років), за що я вдячний всьому колективу кафедри, та особисто завідувачам кафедри.

За час роботи на кафедрі мною були прочитані лекції з таких предметів: теоретична механіка (денна та заочна форми навчання), вища математика (вечірня та заочна форми навчання), методи наближених обчислень (заочна форма навчання), спеціальний курс – теорія оптимального керування (денна форма навчання, студентам прикладникам). Керував курсовими та дипломними роботами студентів, які спеціалізувалися по кафедрі прикладної математики. Керував виробничою практикою студентів-прикладників, возив частину цих студентів на практику за межі області.

Неодноразово був куратором студентських груп кафедри, починаючи з 1969 року, тобто з початку моєї роботи на факультеті. Деякі групи, де я був куратором, займали призові місця у змаганнях між групами всього факультету. Довший час на факультеті був відповідальним за оформлення корпусу та колони математичного факультету до відповідних свят. Брав активну участь у виборчій компанії. За активну роботу неодноразово був відзначений грамотами факультету та університету, а до відзначення 50 річчя з дня утворення кафедри (2012 рік) був нагороджений грамотою та цінним подарунком від імені голови Обласної Ради Чернівецької області.

За весь час роботи на кафедрі щодо проведення занять до мене не було ніяких зауважень. За 43 роки праці на кафедрі жоден завідувач кафедри до мене не приходив на заняття. Не знаю чи це було довірою до мене, чи якась інша причина.

Хочу пригадати такий факт: читаючи лекцію з предмету «Теорія оптимального керування», 1-а пара, понеділок, 4 курс, студенти кафедри прикладної математики, продзвонив дзвоник, я уже почав пару, відкриваються двері аудиторії (це була 33 аудиторія, біля дошки підвищення) і в аудиторію заходить декан факультету Крехівський Володимир Васильович, сідає на передостанню парту. Я продовжив читання лекції і по завершенні пари декан закликає мене в деканат на обговорення проведеної пари. Обговорення проведеної пари не було тривалим, основний недолік проведеної пари був висловлений Володимиром Васильовичем те, що немає потреби запам'ятовувати весь лекційний матеріал, а можна би було підглянути в конспект. Я вважаю, що декан був толерантним і справедливим, за що я йому і по сьогодні вдячний.

У моєму житті був ще один факт, дуже неприємний для мене і міг спричинити зміну місця роботи. Хтось написав донос, що моя родина і я з нею були інтерновані в 1947 р. Але з допомогою декана факультету Володимира Васильовича Крехівського і мого наукового керівника Павла Прохоровича Вчерашнюка вдалось побороти цю прикрість.

Наукове видання

ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ ТА ІТ-ТЕХНОЛОГІЇ

Міжвузівський науковий семінар,
присвячений 100-річчю від дня народження
професора Василя Павловича Рубаника (1917–1993)
і 55-річчю кафедри прикладної математики
та інформаційних технологій

Матеріали семінару

9 – 10 червня 2017 року

Видання здійснено за фінансової підтримки
компанії SharpMinds

Підписано до друку 06.2017. Формат 60х84/16.
Папір Офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. . Обл. вид. арк.
Тираж прим. Зам №
Друк